

Tatjana Atanasova-Paçemska
Zoran Trifunov

MATEMATIKA

»»»» për vitin **IV**

arsimi i mesëm profesional



Tatjana Atanasova-Paçemska
Zoran Trifunov

MATEMATIKA

për VITIN IV

ARSIMI I MESËM PROFESIONAL

Drejtimet:

Gjeologji, xehetari dhe metalurgji, Ndërtimtari dhe gjeodezi, Elektroteknikë,
Makineri, Komunikacion, transport dhe deponim, Tekstil, lëkurë dhe prodhime të
ndryshme, Kimi dhe teknologji, arsimi i mesëm profesional

Matematika për vitin IV

ARSIMI I MESËM PROFESIONAL

Drejtimit:

Gjeologji, xehetari dhe metalurgji, Ndërtimtari dhe gjeodezi, Elektroteknikë, Makineri, Komunikacion, transport dhe deponim, Tekstil, lëkurë dhe prodhime të ndryshme, Kimi dhe teknologji, arsimi i mesëm profesional

Autorë:

Tatjana Atanasova-Paçemska

Zoran Trifunov

Recensentë:

Beti Andonoviq

Vilma Ilievska

Mira Tashkova

Titulli origjinal:

Математика

за IV година

СРЕДНО СТРУЧНО ОБРАЗОВАНИЕ

Струки:

Геолошко-рударска и металуршка/Геологија, рударство и металургија, Градежно- геодетска/ Градежништво и геодезија, Електротехничка/Електротехника, Машинска/ Машинство, Сообраќајна/ Сообраќај, транспорт и складирање, Текстилно-кожарска/ Текстил, Кожа и слични производи и Хемиско технолошка/Хемија и технологија, средно стручно образование

Tatjana Atanasova-Paçemska

Zoran Trifunov

Përkthyer nga gjuha maqedonase: Muzafer Beqiri

Redaktore profesionale në gjuhën shqipe: Xhevair Beqiri

Lektor: Refail Sulejmani

Botues: Ministria e Arsimit dhe Shkencës e Republikës së Maqedonisë së Veriut
rr. "Shën Kirili dhe Metodi" nr. 54 1000 Shkup.

Ilustrimet: Tatjana Atanasova-Paçemska, Zoran Trifunov

Rregullimi grafik-teknik: Vladimir Mlladenovski – ARS STUDIO

Vendi dhe viti i botimit: Shkup, 2025

Me vendim nr. 26-576/1 të datës 8.04.2024, Komisioni nacional për tekste shkollore e lejon tekstin shkollor për lëndën Matematika për vitin IV DREJTIMI/SEKTOR: Gjeologji, xehetari dhe metalurgji, Ndërtimtari dhe gjeodezi, Elektroteknikë, Makineri, Komunikacion, transport dhe deponim, Tekstil, lëkurë dhe prodhime të ndryshme, Kimi dhe teknologji, arsimi i mesëm profesional, arsimi i mesëm profesional katërvjeçar.

MATEMATIKA PËR VITIN IV

Tatjana Atanasova-Paçemska
Zoran Trifunov

PËRMBAJTJA

PARATHËNIE	7
------------------	---

NJËSIA MODULARE 1. VARGJET DHE PROGRESIONET

1. PËRKUFIZIMI DHE VETITË E VARGJEVE TË NUMRAVE REALË	9
2. PROGRESIONI ARITMETIK	18
3. SHUMA E N -ANËTARËVE TË PROGRESIONIT ARITMETIKE	23
4. PROGRESIONI GJEOMETRIK	27
5. SHUMA E N -ANËTARËVE TË PROGRESIONIT GJEOMETRIK	32
6. VLERA KUFITARE E VARGUT	37
7. OPERACIONET ME VARGJET KONVERGJENTE.....	47
8. SHUMA E ANËTARËVE TË PROGRESIONIT TË PAFUNDSHËM GJEOMETRIK	55
DETYRA PËR PËRSËRITJE DHE ZBATIM PRAKTIK	61

NJËSIA MODULARE 2. FUNKSIONE ELEMENTARE

1. KONCEPTI PËR FUNKSIONIN	64
1.1. Fusha e përkufizimit të funksionit.....	65
1.1.1. Fusha e përkufizimit të funksionit polinomial	66
1.1.2. Fusha e përkufizimit të funksionit me tregues çift të rrënjës	66
1.1.3. Fusha e përkufizimit të funksionit racional thesor.....	67
1.1.4. Fusha e përkufizimit të funksionit logaritmik.....	68
1.2. Zerot e funksionit.....	69
1.3. Funksionet çift dhe tek.....	71
1.4. Kufizimi i funksionit	73
1.5. Monotonia e funksionit	74
2. FUNKSIONI LINEAR	79
3. FUNKSIONI KATROR	84
4. FUNKSIONI I FUQISË	90
4.1 Funksioni i fuqisë me tregues natyror	90
4.2. Funksioni i fuqisë me tregues numër racional	92
5. FUNKSIONI EKSPONENCIAL	98
6. FUNKSIONI LOGARITMIK.....	100
7. KONCEPTI PËR FUNKSION INVERS	102
8. FUNKSIONET THEMELORE TRIGONOMETRIKE	105
DETYRA PËR PËRSËRITJE DHE ZBATIM PRAKTIK	108

NJËSIA MODULARE 3. VLERA KUFITARE E FUNKSIONIT

1. KONCEPTI PËR VLERË KUFITARE TË FUNKSIONIT	112
Vlera kufitare.....	112
Vlera kufitare e funksionit kur argument tenton në pakufi	115

<i>Vlera kufitare e majtë dhe e djathtë.....</i>	<i>116</i>
<i>Vetitë e kufijve të funksioneve.....</i>	<i>121</i>
2. VIJUESHMËRIA E FUNKSIONIT.....	130
3. ASIMPTOTAT E LAKORES	144
4. KUFIJTË E FUNKSIONEVE ELEMENTARE. ASIMPTOTAT E GRAFIKËT TË FUNKSIONEVE ELEMENTARE	152
<i>Funksioni linear.....</i>	<i>152</i>
<i>Funksioni katror</i>	<i>153</i>
<i>Funksioni i fuqisë</i>	<i>155</i>
<i>Funksioni eksponencial</i>	<i>156</i>
<i>Funksioni logaritmik</i>	<i>157</i>
5. VLERAT KUFITARE SPECIALE	158
DETYRA PËR PËRSËRITJE DHE ZBATIM PRAKTIK.....	163
 <u>NJËSIA MODULARE 4. DERIVATI I FUNKSIONIT</u>	
1. PËRKUFIZIMI I DERIVATIT TË FUNKSIONIT TE PIKA.....	167
2. PËRCAKTIMI DERIVATIT TË FUNKSIONEVE ELEMENTARE.....	173
3. DERIVATI PREJ SHUMËS, NDRYSHIMIT, PRODHIMIT DHE HERËSIT	180
<i>Derivati prej shumës dhe ndryshimit të funksioneve.....</i>	<i>180</i>
<i>Derivati prej prodhimit të konstantes me funksionit.....</i>	<i>181</i>
<i>Derivati prej prodhimit të funksioneve</i>	<i>181</i>
<i>Derivati prej herësit të funksioneve.....</i>	<i>183</i>
4. DERIVAT PREJ FUNKSIONIT TË PËRBËRË	187
5. DERIVATI LOGARITMIK.....	193
6. ZBATIMI I DERIVATEVE. PËRCAKTIMI I TANGJENTËS DHE NORMALES SË FUNKSIONIT	199
<i>Derivati i rendit të lartë.....</i>	<i>199</i>
<i>Barazimi i tangjentës</i>	<i>200</i>
<i>Barazimi i normales</i>	<i>204</i>
7. ZBATIMI I DERIVATEVE NË FIZIKË.....	208
8. ZBATIMI I DERIVATI. SHQYRTIMI I VIJIMIT DHE GRAFIKU I FUNKSIONIT	211
<i>Shqyrtimi i monotonies së funksionit.....</i>	<i>211</i>
<i>Shqyrtimi i vlerave ekstreme të funksionit.....</i>	<i>216</i>
<i>Shqyrtimi i konveksitetit dhe konkavitetit të funksionit. Pikat e infleksionit.....</i>	<i>224</i>
<i>Shqyrtimi i vijimit dhe skicimi i grafikut të funksionit</i>	<i>227</i>
9. ZBATIMI I DERIVATIT PËR ZGJIDHJE TË PROBLEMEVE PREJ EKSTREMEVE	241
DETYRA PËR PËRSËRITJE DHE ZBATIM PRAKTIK.....	253
 SHTESË: TESTE	255
ZGJIDHJE TË DETYRAVE.....	264

PARATHËNIE

Teksti shkollor “Matematika” është shkruar sipas programit mësimor sipas lëndës së detyrueshme Matematika për vitin IV të arsimit të mesëm profesional në këto drejtime: Gjeologji, xehetari dhe metalurgji, Ndërtimtari dhe gjeodezi, Elektroteknikë, Makineri, Komunikacion, transport dhe deponim, Tekstil, lëkurë dhe prodhime të ndryshme, Kimi dhe teknologji, arsimi i mesëm profesional.

Te teksti shkollor janë përpunuar teoritë dhe konceptet themelore të shkencës së matematikës bashkëkohore të cilat janë të domosdoshme në formimin e drejtimeve të profileve të përmendur. Nga aspekti teorik dhe praktik, janë përpunuar përmbajtje në 4 njësi të ndryshme modulare – vargje dhe progresione, funksione reale elementare, vlera kufitare e funksioneve me një ndryshore reale dhe derivate të funksionit (bazat e njehsimit diferencial) si më të nevojshme dhe më të zbatuara në teori dhe praktikë.

Vëmendje të veçantë është vënë në përpunimin e funksioneve real ku çdo koncept matematikor është lidhur me koncept profesional përkatës nga teoria dhe praktika, që nxënësve tua ofron zbatimin e metodave matematikore dhe instrumentet në interpretimin e rezultateve të fituara prej analizave dhe hulumtimeve të ndryshme.

Teksti shkollor përmban një numër të mjaftueshëm të shembujve të zgjidhur të cilët nxënësve do t’u ndihmon në përvetësimin e metodave dhe teknikave për zgjidhje të problemeve matematikore në kontekst teknik. Shembujt janë mbështetur me paraqitje grafike, më së shpeshti të vizatuar në pakon e hapur softuerik GEOGEBRA. Teksti shkollor përmban edhe detyra të cilat pjesërisht ose tërësisht të pazgjidhura dhe ato janë dedikuar për punë të pavarur të nxënësve me qëllim arritje të suksesit më të madh, efikasitet në përvetësimin e materialit mësimor dhe arritje të rezultateve në të mësuarit.

Në këtë tekst shkollor është bërë përpjekja fillestare të mundësohet qasje direkte deri te resurset digjitale – aplete (skica digjitale interaktive) të punuara prej autorëve.



Skenoni QR – kodet me Telefonin tuaj të mençur ose futni direkt në kompjuter linket aktive për qasje direkte deri te apletet e punuara për paraqitje vizuale ose vizatim.

Për formimin e këtij teksti shkollor meritë të veçantë kanë edhe recensentët të cilët me sugjerimet e tyre dhe vërejtje kontribuan në përmirësimin e cilësisë së dorëshkrimit, për të cilën u shprehim falënderim të veçantë.

Shpresojmë se tekstin shkollor do ta shfrytëzojnë nxënësit prej drejtimeve teknike, ndërsa edhe nxënësit tjerë të cilët e mësojnë lëndën e matematikës në drejtime tjera, ndërsa njohuritë e përvetësuara do të jenë mbështetje përkatëse edhe për vazhdimin e arsimimit, në veçanti në programet studimore nga fushat natyrore-matematikore dhe teknike-teknologjike.

Nga autorët

NJËSIA MODULARE 1

VARGJET DHE PROGRESIONET

Në këtë njësi modulare do të mësohen:

Koncepti për vargun.

Progresioni aritmetik.

Anëtari i përgjithshëm. Shuma e n -anëtarëve të parë.

Vetitë themelore të progresionit aritmetik. Interpolimi.

Progresioni gjeometrik.

Anëtari i përgjithshëm. Shuma e n -anëtarëve të parë.

Vetitë themelore të progresionit gjeometrik. Interpolimi.

Vargjet konvergjente dhe divergjente.

Kufiri i vargut konvergjent.

Shuma e progresionit të pafundshëm gjeometrik.

VARGJET PREJ NUMRAVE REALË

1. PËRKUFIZIMI DHE VETITË E VARGJEVE PREJ NUMRAVE REALË

HYRJE

Në jetën e përditshme kemi nevojë disa lëndë, koncepte ose numra t'i rendisim në ndonjë radhitje logjike dhe të orientuar sipas rregullës të caktuar. Me renditjen e kështu, elementet janë renditur në varg. Çdo element ka saktë vend të caktuar në atë varg.

Shembulli 1. Shembuj për vargje.

a) Shkronjat greke, të cilat shfrytëzohen prej shekullit të nëntë para eposë sonë janë renditur në varg. Në vendin e parë është α , në vendin e dytë β etj., në vendin e fundit, d.m.th., vendin e njëzet e katër është ω . Mund të shkruajmë se 1 i shoqërohet shkronja α , 2 shkronja β , ndërsa në fund 24 shkronja ω . Është fituar vargu $\alpha, \beta, \dots, \omega$.

b) Nëse çdo numri natyror i shoqërojmë fuqinë e numrit 2, d.m.th., 1 i shoqërojmë 2^1 , 2 i shoqërojmë 2^2 , ..., n i shoqërojmë 2^n , ... fitohet vargu i fuqive të numrit 2. Është fituar vargu $2^1, 2^2, \dots, 2^n, \dots$

Përkufizim: Çdo funksion $f : N \rightarrow R$, prej bashkësisë së numrave natyrorë (N) në bashkësinë e numrave realë (R), e quajmë varg prej numrave realë.

Shembulli 2. Të shkruhet vargu ashtu që çdo numri natyror do t'i shoqërojmë katrorin e tij.

Zgjidhje:

Për shënimin më të lehtë të anëtarëve të vargut do ta shfrytëzojmë funksionin.

Le të jetë $N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ dhe $f(x) = x^2$ funksion me të cilin do t'i fitojmë elementet e vargut.

$$f(1) = 1^2 = 1, \quad f(2) = 2^2 = 4, \quad f(3) = 3^2 = 9, \quad \dots \quad f(n) = n^2 \quad \dots$$

Fitojmë, $1, 4, 9, \dots, n^2, \dots$ – varg prej numrave realë.

Nëse funksionin e shënojmë me $a : N \rightarrow R$, atëherë anëtarët e vargut mund t'i shkruajmë me shënimin a dhe indeks n , sipas numrit real të anëtarit. Te shembulli i dhënë mund të shkruhet

$$f(1) = a_1 = 1^2 = 1, \quad f(2) = a_2 = 2^2 = 4, \quad f(3) = a_3 = 3^2 = 9, \quad \dots \quad f(n) = a_n = n^2, \quad \dots$$

Numrat $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ quhen-anëtarët e vargut. Shkurtimisht vargun e shënojmë me simbolin (a_n) .

a_1 është anëtari i parë, a_2 është anëtari i dytë, a_3 është anëtari i tretë, a_n është anëtari n .

Numri a_n quhet anëtari i përgjithshëm i vargut, ndërsa indeksi e paraqet numrin rendor të atij anëtari të vargut.

Vargu është plotësisht i caktuar nëse e dimë rregullën për fitimin e anëtarit të përgjithshëm a_n .

Shembulli 3. Të shkruhen 5 anëtarët e parë të vargut të dhënë me anëtarin e përgjithshëm $a_n = \frac{1}{n+1}$.

Zgjidhje:

$$a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}, \quad a_3 = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}, \quad a_4 = \frac{1}{4+1} = \frac{1}{5}, \quad a_5 = \frac{1}{5+1} = \frac{1}{6}$$

Vargu i numrave realë është: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots, \frac{1}{n+1}, \dots$

Shembulli 4. a) Të shkruhet vargu me anëtarin e përgjithshëm $a_n = 3n+1$, $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

b) Të shkruhet vargu me anëtarin e përgjithshëm $b_n = 3n+1$, $n \in \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$.

Zgjidhje:

a)

$$a_1 = 3 \cdot 1 + 1 = 3 + 1 = 4$$

$$a_2 = 3 \cdot 2 + 1 = 6 + 1 = 7$$

$$a_3 = 3 \cdot 3 + 1 = 9 + 1 = 10$$

$$a_4 = 3 \cdot 4 + 1 = 12 + 1 = 13$$

$$a_5 = 3 \cdot 5 + 1 = 15 + 1 = 16$$

b)

$$b_1 = 3 \cdot 1 + 1 = 3 + 1 = 4$$

$$b_2 = 3 \cdot 2 + 1 = 6 + 1 = 7$$

$$b_3 = 3 \cdot 3 + 1 = 9 + 1 = 10$$

...

$$b_n = 3 \cdot n + 1$$

...

a) Vargu prej numrave realë 4, 7, 10, 13, 16 ka 5 anëtar dhe quhet varg me numër të fundshëm të anëtarëve (varg i fundshëm).

b) Vargu prej numrave realë 4, 7, 10, 13, 16, ..., $3n+1$, ... ka pafund shumë anëtarë dhe quhet varg me numër të pafundshëm të anëtarëve (varg i pafundshëm).

Vargu (a_n) , mund ta paraqesim në Geogebra duke shfrytëzuar kolonat A dhe B të paraqitja tabelare, ku të kolona A shkruhet numri real i anëtarit, ndërsa të kolona B formula për anëtarin e përgjithshëm të vargut, ku do të duhet të zëvendësohet vlera e n me. fushën A1. Me kopjimin e formulës fitohen-anëtarët tjerë të vargut.

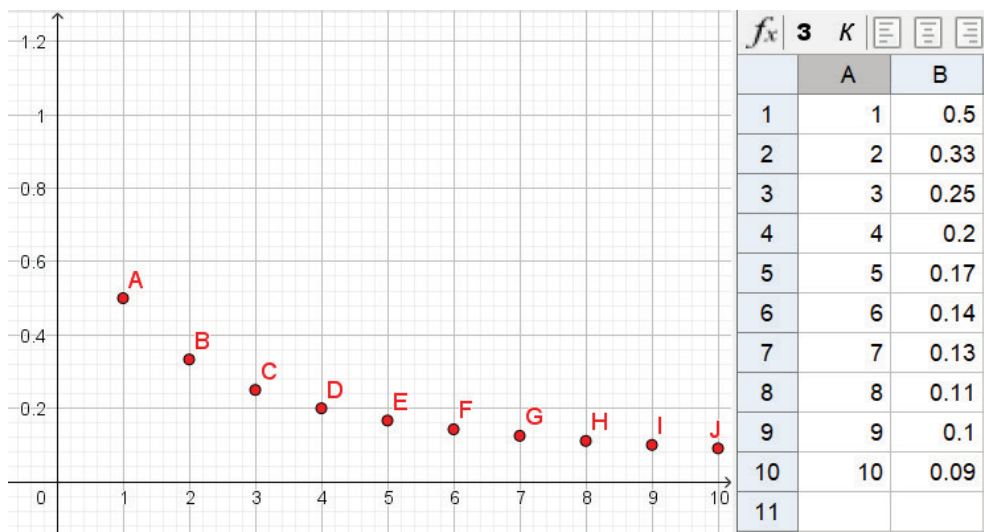
Për shembull le të jetë dhënë vargu me anëtarin e përgjithshëm $a_n = 3n + 1$. Te kolona B janë shkruar 5 anëtarët e parë të vargut

	A	B	C
1	1	$=3 \cdot A1 + 1$	
2	2		
3	3		
4	4		
5			
6			

	A	B	C
1	1	4	
2	2	7	
3	3	10	
4	4	13	
5	5	16	
6			

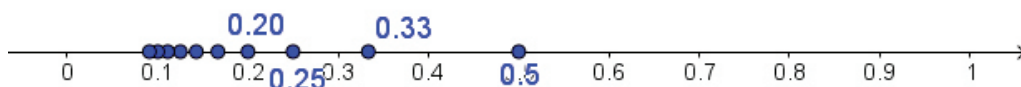
Vargu (a_n) , si funksion prej bashkësisë N në bashkësinë e numrave R mund të paraqitet grafikisht në rrafshin koordinativ. Poashtu në boshtin x e bartim numrin rendor n të anëtarit, port e boshti y – vlerën e a_n . Kështu për shembull, anëtarit të parë i shoqërojmë pikën $(1, a_1)$, anëtarit të dytë $(2, a_2)$ etj.

Për shembull është dhënë vargu me anëtarin e përgjithshëm $a_n = \frac{1}{n+1}$. Së pari te kolonat A dhe B i fitojmë numrat rendor të anëtarëve dhe vlera e tyre. Me ndihmën e urdhërit “Krijto listën e dritares grafike prej pikave” prej Geogebres dhe selektimi i kolonave të plotësuara A dhe B, në dritaren geometrike grafikisht e paraqet vargun



Nëse dëshirojmë grafikisht t'i paraqesim anëtarët e vargut, atëherë ato janë pikat te boshti numerik.

Për shembull vargu me anëtarin e përgjithshëm $a_n = \frac{1}{n+1}$, paraqitet vetëm me pika të boshtit x , ku vlera e çdo anëtari të vargut është paraqitur si pikë e veçantë.



Shembulli 5. Është dhënë vargu i numrave $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, \frac{16}{5}, \frac{25}{6}, \dots$. Me prove dhe kontroll të caktohet anëtarë i tij i përgjithshëm.

Zgjidhje: Anëtarë i përgjithshëm i vargut është $a_n = \frac{n^2}{n+1}$, pasi te numëruesi kemi fuqi të numrit real n të anëtarit, port e emëruesi i numrit rendor n të anëtarit është dhënë vetëm 1. Të shqyrtojmë disa shembuj të vargjeve dhe të konstatojmë disa veti karakteristike të vargjeve prej numrave realë.

Shembulli 6. Janë dhënë vargjet me anëtarët e përgjithshëm

a) $a_n = \frac{2n}{n+1}$

b) $a_n = \frac{1}{n+1}$

c) $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$

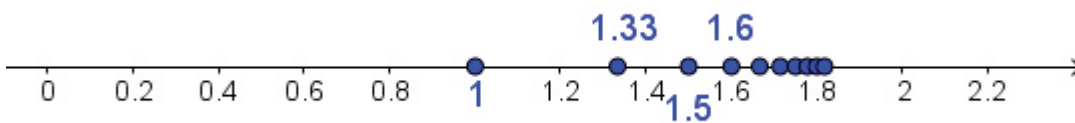
ç) $a_n = 2$

Të shkruhen pesë anëtarët e parë të vargut, të paraqiten te boshti numerik dhe të caktohet shenja e ndryshimit të anëtarëve fqinjë $a_1 - a_2, a_2 - a_3, \dots, a_n - a_{n+1}$ për $n \in \mathbb{N}$.

Zgjidhje:

a) Anëtare e vargut janë: $1, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{5}{3}, \dots$ ose

të shkruar me vlera të përafërta anëtarët e vargut janë: 1, 1.33, 1.5, 1.6, 1.67, ...



$$a_1 - a_2 = 1 - \frac{4}{3} = \frac{3-4}{3} = -\frac{1}{3} < 0. \text{ Kemi } a_1 - a_2 < 0,$$

$$a_2 - a_3 = \frac{4}{3} - \frac{3}{2} = \frac{8-9}{6} = -\frac{1}{6} < 0. \text{ Kemi } a_2 - a_3 < 0$$

$$a_n - a_{n+1} = \frac{2n}{n+1} - \frac{2n+2}{n+2} = \frac{2n^2 + 4n - 2n^2 - 2n - 2n - 2}{(n+1)(n+2)} = -\frac{2}{(n+1)(n+2)} < 0.$$

Kemi $a_n - a_{n+1} < 0$, d.m.th., $a_n < a_{n+1}$ për $n \in \mathbb{N}$.

Për vargun me anëtarin e përgjithshëm $a_n = \frac{2n}{n+1}$ themi se **rritet**.

b) Anëtarët e vargut janë: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$ ose

të shkruar me vlera të përafërta anëtarët e vargut janë: 0.5, 0.33, 0.25, 0.2, 0.17, ...



$$a_1 - a_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6} > 0. \text{ Kemi } a_1 - a_2 > 0,$$

$$a_2 - a_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4-3}{12} = \frac{1}{12} > 0. \text{ Kemi } a_2 - a_3 > 0$$

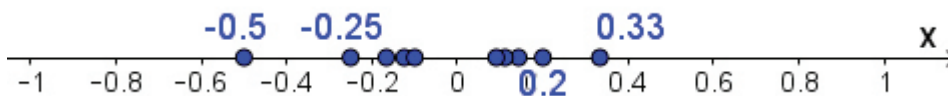
$$a_n - a_{n+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{n+2-n-1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0.$$

Fitohet $a_n - a_{n+1} > 0$, se $a_n > a_{n+1}$ për $n \in \mathbb{N}$.

Për vargun me anëtarin e përgjithshëm $a_n = \frac{1}{n+1}$ themi se **zvogëlohet**

c) Anëtarët e vargut janë: $-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \dots$ ose të shkruar me vlera të përafërta anëtarët

e vargut janë: -0.5, 0.33, -0.25, 0.2, -0.17, ...



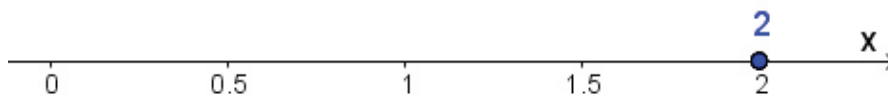
$$a_1 - a_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{-3-2}{6} = -\frac{5}{6} < 0. \text{ Kemi } a_1 - a_2 < 0,$$

$$a_2 - a_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4+3}{12} = \frac{7}{12} > 0. \text{ Kemi } a_2 - a_3 > 0$$

Fitohet se shenja e ndryshimit ndryshon varësisht prej vlerës së $n \in \mathbb{N}$.

Për vargun me anëtarin e përgjithshëm $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ themi se as rritet, as zvogëlohet.

ç) Anëtarët e vargut janë: $2, 2, 2, 2, 2, \dots$ ose të shkruar me vlera të përafërta anëtarët e vargut janë:



$$a_1 - a_2 = 2 - 2 = 0. \text{ Kemi } a_1 - a_2 = 0,$$

$$a_2 - a_3 = 2 - 2 = 0. \text{ Kemi } a_2 - a_3 = 0$$

$$a_n - a_{n+1} = 2 - 2 = 0. \text{ Kemi } a_n - a_{n+1} = 0 \text{ d.m.th., } a_n = a_{n+1} \text{ për } n \in N.$$

Për vargun me anëtarin e përgjithshëm $a_n = 2$ themi se është **varg konstant**.

Vetia e rritjes/zvogëlimit të vargut quhet **vetia e monotonisë**, ndërsa vargu **varg monotoni**.

Përkufizim:

Vargu (a_n) monotonisht rritet nëse për çdo $n \in N$, $a_n < a_{n+1}$, $(a_n - a_{n+1} < 0)$ d.m.th.,
 $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n < a_{n+1} < \dots$

Vargu (a_n) monotonisht zvogëlohet nëse për çdo $n \in N$, $a_n > a_{n+1}$, $(a_n - a_{n+1} > 0)$ d.m.th.,
 $a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > a_{n+1} > \dots$

Vargu (a_n) nuk zvogëlohet nëse për çdo $n \in N$, $a_n \leq a_{n+1}$, $(a_n - a_{n+1} \leq 0)$

Vargu (a_n) nuk rritet nëse për çdo $n \in N$, $a_n \geq a_{n+1}$, $(a_n - a_{n+1} \geq 0)$.

Shembulli 7. Të shqyrtohet monotonia e vargut $a_n = \frac{n+1}{n+2}$.

Zgjidhje:

Për të shqyrtuar monotoninë e vargut, së pari duhet të shkruhen disa anëtarë të vargut $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$, ndërsa pastaj të caktohet shenja e disa ndryshimeve $a_1 - a_2$, $a_2 - a_3, \dots$ prej anëtarëve fqinj

$$a_1 - a_2 = \frac{2}{3} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{12} < 0, \quad a_2 - a_3 = \frac{3}{4} - \frac{4}{5} = -\frac{1}{20} < 0, \dots$$

Ndryshimi ndërmjet disa anëtarëve të parë prej vargut nuk e ndryshon shenjën, ndërsa për ta shqyrtuar monotoninë duhet të caktojmë a do të vlen në përgjithësi dhe për dallim të ndryshimit të anëtarit n të vargut $(n+1)$.

Ta caktojmë vlerën e ndryshimit $a_n - a_{n+1}$,

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} &= \frac{n+1}{n+2} - \frac{n+2}{n+3} = \frac{(n+1)(n+3) - (n+2)^2}{(n+2)(n+3)} = \\ &= \frac{(n^2 + 4n + 3) - (n^2 + 4n + 4)}{(n+2)(n+3)} = \frac{n^2 + 4n + 3 - n^2 - 4n - 4}{(n+2)(n+3)} = -\frac{1}{(n+2)(n+3)} < 0, \end{aligned}$$

Fitohet se $a_n - a_{n+1} < 0$. Sipas përkufizimit për monotoninë e vargut vijon se vargu monotonisht rritet.

Te shembulli 6 nën c) $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$, nëse i shqyrtojmë anëtarët e vargut të cilët janë paraqitur te boshti numerik, mund të vërejmë se të gjithë gjenden në intervalin $(-1, 1)$. Kjo mund të shkruhet se $-1 < a_n < 1$, për çdo $n \in \mathbb{N}$.

Përkufizim: Vargu (a_n) , $n = 1, 2, 3, \dots$, themi se është:

I kufizuar prej lartë, nëse ekziston numër real M ashtu që $a_n \leq M$, për çdo numër natyror n ;

I kufizuar prej poshtë, nëse ekziston numër real M ashtu që $a_n \geq M$, për çdo numër natyror n ;

I kufizuar, nëse është i kufizuar prej lartë dhe prej poshtë, d.m.th., ekziston numër real m dhe M ashtu që $m \leq a_n \leq M$, për çdo numër natyror n .

Përkufizimin për kufizimin e vargut mund ta shprehim edhe me vlerë absolute prej anëtarëve të vargut

Përkufizim: Vargu (a_n) është i kufizuar nëse bashkësia $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ është e kufizuar d.m.th., nëse ekziston numër real $A > 0$ ashtu që $|a_n| \leq A$, për çdo $n \in \mathbb{N}$.

Shembulli 8. Të vërtetojmë se vargu me anëtarin e përgjithshëm $a_n = 3 - n^2$ është i kufizuar prej lartë me numrin $M = 2$.

Zgjidhje:

Duhet të vërtetojmë se $a_n \leq 2$ d.m.th. $3 - n^2 \leq 2$.

Do të fillojmë prej pabarazimit të njohur. Le të jetë $n \in N$ numër natyror, atëherë :

$$\begin{array}{ll} n \geq 1 & -n^2 \leq -1 \quad / +3 \\ n^2 \geq 1^2 & 3 - n^2 \leq 3 - 1 \\ n^2 \geq 1 \quad / \cdot (-1) & 3 - n^2 \leq 2 \end{array}$$

Kemi se $a_n \leq 2$. Vërtetohet se vargu është i kufizuar prej lartë me numrin 2.

Shembulli 9. Të shqyrtohet kufizimi i këtyre vargjeve:

$$\text{a) } a_n = \frac{1}{2n} \quad \text{b) } a_n = \frac{3n+1}{6n+5} \quad \text{c) } a_n = \frac{4n+3}{4n+5} \quad \text{ç) } 0,5; 0,51; 0,511; 0,5111; \dots$$

Zgjidhje:

a) Për ta shqyrtuar kufizimin e vargjeve, sipas përkufizimit për kufizim të vargjeve, kemi:

Për çdo $n \in N$, $|a_n| = \left| \frac{1}{2n} \right| = \frac{1}{2n} \leq 1$, ose ndryshe, kufizimin e vargut mund ta vërejmë edhe

nëse shkruajmë disa anëtarë të vargut të dhënë me anëtarin e përgjithshëm.

Disa anëtarë të parë të vargut janë: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \dots$, ndërsa ato paraqesin thyesa, vlera e të cilës

zvogëlohet, ndërsa mëe madhja prej vlerave mund të kufizohet me 1.

b) Për çdo $n \in N$, fitohet

$$|a_n| = \left| \frac{3n+1}{6n+5} \right| = \left| \frac{6n+5-3n-4}{6n+5} \right| = \left| \frac{6n+5-(3n+4)}{6n+5} \right| = \left| \frac{6n+5}{6n+5} - \frac{3n+4}{6n+5} \right| = \left| 1 - \frac{3n+4}{6n+5} \right| \leq 1$$

Sipas përkufizimit, vijon se vargu është i kufizuar.

c) Për çdo $n \in N$, fitohet

$$|a_n| = \left| \frac{4n+3}{4n+5} \right| = \left| \frac{4n+5-2}{4n+5} \right| = \left| \frac{4n+5}{4n+5} - \frac{2}{4n+5} \right| = \left| 1 - \frac{2}{4n+5} \right| \leq 1$$

Sipas përkufizimit, vijon se vargu është i kufizuar.

ç) Për çdo $n \in N$, fitohet

$$|a_n| = \left| \frac{5}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots + \frac{1}{10^n} \right| = \frac{5}{10} + \frac{1}{10^2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{5}{10} + \frac{1}{10^2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{10^{n-1}}}{\frac{9}{10}} =$$

$$= \frac{5}{10} + \frac{1}{10^2} \cdot \frac{10 \cdot \left(1 - \frac{1}{10^{n-1}}\right)}{9} = \frac{5}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{\left(1 - \frac{1}{10^{n-1}}\right)}{9} \leq \frac{5}{10} + \frac{1}{90} = \frac{46}{90} = \frac{23}{45}$$

prej ku vijon se vargu është i kufizuar.

Detyra për ushtrime:

1. Gjej pesë anëtarët e parë të vargut me anëtarin e përgjithshëm:

a) $a_n = \frac{2n}{1+n^2}$ b) $a_n = (-1)^n$ c) $a_n = 2^n$ ç) $a_n = \frac{1}{n!}$

2. Shkruaj dy vargje të cilët monotonisht rriten.

3. Shkruaj dy vargje të cilët monotonisht zvogëlohen.

4. Gjeje anëtarin e përgjithshëm të këtyre vargjeve:

a) 1, 4, 9, 16, 25, ... b) 1, 3, 7, 15, 31, ... c) 1, -1, 1, -1, 1, ... ç) $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$

Të caktohet monotonia dhe kufizimi i vargjeve të dhënë me anëtarin e përgjithshëm:

5. $a_n = \frac{1}{3^n}$

6. $a_n = \frac{n}{n+3}$

7. $a_n = \frac{n^2}{n^2-5}$

8. $a_n = \frac{n}{e^n}$

9. Të shqyrtohet monotonia e vargjeve me anëtarin e përgjithshëm:

a) $a_n = \frac{3n-1}{n^2}$ b) $a_n = \frac{2-n}{3^n}$ c) $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ ç) $a_n = \sqrt{n} - 2n$ d) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

10. Cili prej këtyre vargjeve është i kufizuar:

a) $a_n = \frac{5n}{3n+2}$ b) $a_n = 2n + (-1)^n$ c) $a_n = \frac{(-1)^n \cdot n^2}{2}$ ç) $a_n = \frac{n + (-1)^n}{n}$ d) $a_n = \frac{3^n + 2}{3^n}$

2. PROGRESIONI ARITMETIK

Në një garë të basketbollit në të katërshen e parë nikoqirët kanë arritur 21 pikë dhe atë në këtë mënyrë, së pari ka arritur 1 pikë prej gjuajtjes së lire, ndërsa pastaj koshët tjerë prej “reket”. Te semafori të pikët e nikoqirit janë shënuar këto numra sipas radhës 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21.

Çka paraqet ky shënim?

Ky shënim paraqet varg prej numrave.

A mund të caktohet ndryshimi i të dy anëtarëve fqinjë (çdo anëtar dhe paraardhësi tij), duke filluar prej të dytit?

Po, mund të caktohet ndryshimi i dy anëtarëve fqinj dhe ai është 2.

Shembulli 1. Janë dhënë vargjet:

a) 3, 4, 5, 6, 7, ... b) 2, 1, 0, -1, -2, ... c) $\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{9}{2}, \frac{13}{2}, \frac{17}{2}, \dots$ ç) 11, 6, 1, -4, -9, ... d) 2, 2, 2, 2, 2, ...

Të caktohet ndryshimi i çdo anëtari dhe paraardhësit duke filluar prej të dytit.

Zgjidhje:

Mund të vërehet se ndryshimi ndërmjet çdo anëtari dhe paraardhësit të tij, duke filluar prej të dytit është konstant dhe është:

a) 1, b) -1, c) 2, ç) -5, d) 0.

Përkufizim: Vargu $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$ për të cilin ndryshimi ndërmjet çdo anëtari të tij dhe paraardhësit të tij, duke filluar prej të dytit numri konstant d quhet vargu aritmetik ose progresioni aritmetik

$$a_{n+1} - a_n = d, \text{ për çdo } n \in \mathbb{N}$$

Shembulli 2. Për vargun 1, 3, 5, 7, 9, 11, ... cakto anëtarin e përgjithshëm dhe ndryshimi i çdo anëtari dhe paraardhësit të tij. Si quhet ky varg?

Të caktohet ndryshimi i çdo anëtari dhe paraardhësit të tij. Si quhet vargu?

Zgjidhje: Anëtari i përgjithshëm i vargut është $a_n = 2n - 1$.

Pastaj e caktojmë ndryshimin ndërmjet dy anëtarëve fqinj, $a_2 - a_1 = 3 - 1 = 2$,
 $a_3 - a_2 = 5 - 3 = 2$, $a_4 - a_3 = 7 - 5 = 2$, ...,

$$a_n - a_{n-1} = (2n - 1) - (2n - 3) = 2n - 1 - 2n + 3 = 2$$

Ndryshimi është konstant dhe ajo është $d = 2$.

Për këtë varg themi se është progresion aritmetik.

Prej shembullit 1, në pajtim me përkufizimin mund të vërejmë se progresioni aritmetik është **monotone rritëse** nëse $d > 0$, **monotone zvogëlues** nëse $d < 0$ dhe është **konstant** nëse $d = 0$.

Në përgjithësi. Le të jetë dhënë progresioni aritmetik $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots$. Prej përkufizimit për progresion aritmetik vijon se

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots = a_n - a_{n-1} = d$$

Prej barazimeve vijuese fitohet

$$a_2 - a_1 = d, \text{ d.m.th., } a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 - a_2 = d, \text{ d.m.th., } a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 - a_3 = d, \text{ d.m.th., } a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$$

...

$$a_n - a_{n-1} = d, \text{ d.m.th., } a_n = a_{n-1} + d.$$

Me zëvendësimin te formulat paraprakisht të fituara te

$$a_n = a_{n-1} + d \text{ fitohet se } a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Teorema: Për anëtarin e përgjithshëm të progresionit aritmetik vlen $a_n = a_1 + (n-1)d$.

Shembulli 3. Cakto anëtarin e 30 të progresionit aritmetik 3, 5, 7, 9, 11, ...

Zgjidhje: Anëtari i parë i vargut është $a_1 = 3$ dhe ndryshimi është $d = 5 - 3 = 2$. Çdo anëtar i ardhshëm zmadhohet për 2.

Sipas teoremës, mund ta njehsojmë anëtarin i tridhjetë $a_{30} = a_1 + (30-1)d$ d.m.th., $a_{30} = 3 + 29 \cdot 2 = 61$

Shembulli 4. Cili anëtar te progresioni aritmetik 5, 1, -3, ... është i brabartë me -55?

Zgjidhje: Prej anëtarëve të dhënë të progresionit aritmetik mund të caktojmë anëtarin e parë, ndryshimin dhe anëtarin n , $a_1 = 5$ dhe $d = 1 - 5 = -4$ dhe $a_n = -55$. Vlerat e dhëna i zëvendësojmë te formula $a_n = a_1 + (n-1)d$ fitohet

$$-55 = 5 + (n-1) \cdot (-4) \Rightarrow -55 = 5 - 4n + 4, \text{ prej ku } n = 16.$$

Anëtari i kërkuar është anëtari i gjashtëdhjetë.

Shembulli 5. Njehso n te progresioni aritmetik nëse $a_1 = -\frac{7}{2}$, $d = -\frac{1}{2}$ dhe $a_n = -10$.

Zgjidhje: Vlerat e dhëna i zëvendësojmë te formula $a_n = a_1 + (n-1)d$. Kemi:

$$-10 = -\frac{7}{2} + (n-1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow -10 = -\frac{7}{2} - \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \text{ prej ku } n = 14.$$

Shembulli 6. Anëtari i pestë i progresionit aritmetik është 19, ndërsa anëtari i dhjetë është 39. Të caktohet vargu.

Zgjidhje: Prej kushtit të detyrës kemi $a_5 = 19$ dhe $a_{10} = 39$. Prej përkufizimit dime se progresioni aritmetik është plotësisht i caktuar nëse i dim anëtarin e parë a_1 dhe ndryshimin d .

Vijon:

$$a_5 = a_1 + (5-1)d \Rightarrow 19 = a_1 + 4d$$

$$a_{10} = a_1 + (10-1)d \Rightarrow 39 = a_1 + 9d$$

Në këtë mënyrë fitohet sistemi i barazimeve lineare $\begin{cases} a_1 + 4d = 19 \\ a_1 + 9d = 39 \end{cases}$. Me zgjidhjen e tij

$$\begin{cases} a_1 + 4d = 19 \\ a_1 + 9d = 39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 19 - 4d \\ 19 - 4d + 9d = 39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 19 - 4d \\ 5d = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 19 - 4 \cdot 4 \\ d = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 3 \\ d = 4 \end{cases}$$

Fitohet se $a_1 = 3$ dhe $d = 4$. Vargu i kërkuar është: 3, 7, 11, 15, 19, ...

Shembulli 7. Në një shitore ditën e parë të muajit janë realizuar të ardhura prej 147420 denarë, ndërsa më 31 të muajit të njëjtë të ardhurat kanë qenë 95610 denarë. Sa është rënia mesatare ditore e të ardhurave, nëse ajo mund të paraqitet si progresion aritmetik që zvogëlohet.

Zgjidhje: prej kushtit të detyrës kemi $a_1 = 147\,420$ dhe $a_{31} = 95\,610$.

Prej përkufizimit për progresion aritmetik kemi,

$$a_{31} = a_1 + (31-1)d \Rightarrow a_{31} = a_1 + 30d$$

I zëvendësojmë vlerat fillestare,

$$95\,610 = 147\,420 + 30d, \quad 30d = 95\,610 - 147\,420, \quad 30d = -51\,810 \quad / : 30$$

$$d = \frac{-51\,810}{30}, \quad d = -1727$$

Të ardhurat zvogëlohen çdo ditë për 1727 denarë.

Shembulli 8. Cakto progresionin aritmetik, nëse shuma e anëtarit të tretë, të pestë dhe të shtatë është 39, ndërsa shuma e anëtarit të katërt dhe të nëntë është 35.

Zgjidhje: Prej kushtit të detyrës mund të shkruajmë barazimet :

$$a_3 + a_5 + a_7 = 39 \text{ dhe } a_4 + a_9 = 35.$$

Me zëvendësim t te formula për anëtarin n kemi:

$$(a_1 + 2d) + (a_1 + 4d) + (a_1 + 6d) = 39 \Rightarrow 3a_1 + 12d = 39 \text{ prej ku } a_1 + 4d = 13$$

$$(a_1 + 3d) + (a_1 + 8d) = 35 \Rightarrow 2a_1 + 11d = 35$$

E fitojmë sistemin e barazimeve lineare:

$$\begin{cases} a_1 + 4d = 13 \\ 2a_1 + 11d = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 13 - 4d \\ 2a_1 + 11d = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 13 - 4d \\ 2(13 - 4d) + 11d = 35 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 13 - 4d \\ 3d = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 13 - 4 \cdot 3 \\ d = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ d = 3 \end{cases}$$

Vargu i kërkuar është 1, 4, 7,

Shembulli 9. Ndërmjet numrave 9 dhe 37 interpo (fut) 6 numra të cilët me numrat e dhënë formojnë progresion aritmetik.

Zgjidhje: Prej kushteve të dhëna ndërmjet numrave 9 dhe 37 duhet të fusim 6 numra dhe poashtu të fitohet progresion aritmetik 9, __, __, __, __, __, 37.

Vargu ka 8 anëtar, ndërsa anëtari i parë dhe i tetë janë $a_1 = 9$ dhe $a_8 = 37$.

Prej formulës për anëtarin e përgjithshëm (në rastin e anëtarit të tetë) $a_8 = a_1 + 7d$, me zëvendësimin

$$37 = 9 + 7d \Rightarrow d = 4.$$

Progresioni i kërkuar është: 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37.

Shembulli 10. Në një shitore ditën e parë të javës është realizuar qarkullim prej 10000, ndërsa ditën e pestë është realizuar qarkullim prej 22000 den. Të njehsohet rritja ditore e qarkullimit, nëse ai rritet në mënyrë të barabartë çdo ditë.

Zgjidhje: Tge detyra është dhënë se qarkullimi rritet në mënyrë të barabartë, që do të thotë se qarkullimi formon progresion aritmetik. Te kushti i detyrës është dhënë qarkullimi për ditën e parë dhe të pestë, d.m.th., $a_1 = 10000$ dhe $a_5 = 22000$. Prej formulës për anëtarin e përgjithshëm $a_5 = a_1 + 4d$, me zëvendësim kemi $22000 = 10000 + 4d \Rightarrow 4d = 12000$ d.m.th., $d = 3000$.

Detyra për ushtrime:

1. Të caktohet anëtari 15 i progresionit aritmetik 2, 5, 8, ...
2. Te progresioni aritmetik 5, 1, -3, ... të caktohet cili anëtar sipas rendit është -51.
3. Të njehsohet numrin tek i 120 sipas radhës.
4. Të njehsohet numri çift i 100 sipas radhës.
5. Borxhi i një organizate në 1 janar të vitit 2000 ka qenë 50000 euro, ndërsa çdo vit të ardhshëm borxhi zvogëlohet për 3500 euro. Pas sa vite borxhi ka qenë 22000 euro?

6. Shuma e tre numrave të cilët formojnë progresion aritmetik është 24. Cakto ato numra, nëse dihet se katrori i numrit të parë është për 96 më i vogël se ndryshimi i katrorëve të numrit të tretë dhe të dytë.

7. Në një punëtori të shkollës për arsim të mesëm profesional çdo muaj prodhimi i llambave zmadhohet me dinamikën e njëjtë. Muajin e parë janë prodhuar 200 llamba, ndërsa në muajin e katërt 224. Në cilin muaj janë prodhuar 272 llamba?

8. Ndëmjet numrave 12 dhe 100 fut 10 numra, të cilët së bashku me numrat e dhënë formojnë progresion aritmetik.

9. Të caktohet progresioni aritmetik për të cilin shuma e anëtarit të katërt dhe të gjashtë është -20, ndërsa prodhimi i anëtarit të parë dhe të pestë është -140.

10. Gjeje progresionin aritmetik:

a) nëse $a_1 + a_4 = -22$ dhe $a_5 = -6$,

b) nëse $a_2 + a_{12} = 50$ dhe $a_3 + a_7 = 38$.

11. Cakto anëtarin n të progresioni aritmetik nëse:

a) $a_1 = 4$, $d = 3$, $n = 8$

c) $a_1 = -9$, $d = 5$, $n = 12$

b) $a_1 = \frac{1}{2}$, $d = -\frac{1}{4}$, $n = 9$

ç) $a_1 = a + b$, $d = a$, $n = 15$

3. SHUMA E N-ANËTARËVE TË PARË TË PROGRESIONIT ARITMETIK

Le të jetë dhënë progresioni aritmetik me numër të fundshëm të anëtarëve 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Anëtarët 2 dhe 9, 3 dhe 8, 4 dhe 7, 5 dhe 6 janë një lloj të larguar prej anëtarëve të skajshëm 1 dhe 10. Për shumën e anëtarëve vlen se $1+10=2+9=3+8=4+7=5+6=11$.

Vetia 1. Për progresionin aritmetik të fundshëm shuma e çfarëdo dy anëtarëve një lloj të larguar prej anëtarit të parë dhe të fundit është e barabartë me shumën e anëtarëve të skajshëm d.m.th., $a_k + a_{n-(k-1)} = a_1 + a_n$, $2 \leq k \leq n$

Vërtetim: $a_k = a_1 + (k-1)d$ dhe $a_{n-(k-1)} = a_1 + (n-(k-1)-1)d = a_1 + (n-k)d$

Për shumën e tyre kemi

$$a_k + a_{n-(k-1)} = a_1 + (k-1)d + a_1 + (n-k)d = a_1 + a_1 + (k-1+n-k)d = a_1 + \underbrace{a_1 + (n-1)d}_{a_n} = a_1 + a_n$$

që duhej edhe të fitohet.

Ta shqyrtojmë përsëri të njëjtin progresion aritmetik, ndërsa tani le të jetë me shumë anëtarë të pafundshëm d.m.th., 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ..., n, ...

Çka vlen për anëtarët e këtij progresioni?

$$2 = \frac{1+3}{2}, \quad 3 = \frac{2+4}{2}, \quad 4 = \frac{3+5}{2}, \quad 5 = \frac{4+6}{2}, \quad \dots$$

Vërejmë se çdo anëtar i progresionit, përveç të parit është mes aritmetik i anëtarëve të tij fqinj.

Vetia 2. Çdo anëtar prej një progresioni aritmetik, përveç të parit, paraqet mes aritmetik prej anëtarit para tij dhe anëtarit pas tij d.m.th.,

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}, \text{ për } k > 1, k \in N.$$

Vërtetim: Le të jenë a_{k-1}, a_k, a_{k+1} tre anëtarë të njëpasnjëshëm të një progresioni aritmetik. Si pas përkufizimit për progresion aritmetik vlen $a_k - a_{k-1} = a_{k+1} - a_k$ d.m.th., $2a_k = a_{k-1} + a_{k+1}$, prej ku vijon $a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$ për $k > 1, k \in N$, që duhej të vërtetohet.

Kjo veti përgjithësohet dhe vlen kjo:

Vetia 3. Çdo anëtar i progresionit aritmetik është mes aritmetik i çdo çift të anëtarëve prej vargut që është një lloj i larguar prej tij.

Ta shqyrtojmë këtë veti te progresioni aritmetike $2, 4, 6, 8, \boxed{10}, 12, 14, 16, 18, \dots$

$$\text{Për numrin } 10 = \frac{8+12}{2}, \quad 10 = \frac{6+14}{2}, \quad 10 = \frac{4+16}{2}, \quad 10 = \frac{2+18}{2}, \quad \dots$$

Le të jetë dhënë progresioni aritmetik me $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$, ndërsa me ndryshimin d . Shuma e n -anëtarëve të parë të progresionit aritmetik shënohet me S_n është:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \text{ d.m.th., } S_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

Shembulli 1. Të caktohet shuma e 10 anëtarëve të parë të progresionit aritmetik 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ...

Zgjidhje:

$$S_{10} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 5 \cdot (1 + 10) = 55$$

Te shembulli kërkohej të caktohet shuma e 10 anëtarëve të parë, ndërsa çka nëse duhet të caktohet shuma e të parëve, 100 ose 1000 anëtarëve?

Ta shkruajmë teoremën për shumën e n -anëtarëve të parë të progresionit aritmetik.

Teorema: Shuma e n -anëtarëve të parë të progresionit aritmetik caktohet sipas formulave:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \text{ ose } S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

Vërtetim: Le të jetë $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$ dhe të shkruar në renditjen e anasjelltë,

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1$$

Me shumën e anëve të majtë dhe të djathtë të dy barazimeve dhe grupimi i anëtarëve prej anës së djathtë, kemi,

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Prej vetisë 1 kemi

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots = a_{n-2} + a_3 = a_{n-1} + a_2 = a_n + a_1 \text{ dhe me zëvendësim fitohet}$$

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)}_n, \text{ d.m.th., } 2S_n = n(a_1 + a_n). \text{ Gjatë pjesëtimit}$$

me 2 e fitojmë formulën $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$, që duhej të vërtetohet.

Nëse e zëvendësojmë për anëtarin n të progresionit aritmetik kemi

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_1 + (n-1)d) \text{ d.m.th., } S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \text{ Me këtë është vërtetuar edhe bara-}$$

zimi i dytë

Shembulli 2. Cakto shumën e 50 anëtarëve të parë të progresionit aritmetik 2,6,10,14,18,...

Zgjidhje: Prej progresionit aritmetik të dhënë mund të caktohet se $a_1 = 2$ dhe $d = 6 - 2 = 4$. Atëherë shuma e 50 anëtarëve të parë është $S_{50} = \frac{50}{2} \cdot (2 \cdot 2 + (50 - 1) \cdot 4) = 5000$.

Shembulli 3. Të caktohet shuma e n -anëtarëve të parë të numrave natyrorë.

Zgjidhje: Vargu prej n numrave të parë natyror është 1, 2, 3, ..., n , ku $a_1 = 1$ dhe $a_n = n$. Me zëvendësim te formula $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(1 + n)$, d.m.th., për shumën vlen

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Shembulli 4. Shuma e 20 anëtarëve të parë të një progresioni aritmetik është 230, ndërsa anëtari i katër është 5. Cakto progresionin.

Zgjidhje: Prej kushteve të dhëna mund të caktojmë $S_{20} = 230$ dhe $a_4 = 5$. Me zëvendësimin te formulat për progresion aritmetik i fitojmë barazimet $\frac{20}{2}(2a_1 + (20 - 1)d) = 230$ dhe $a_1 + 3d = 5$.

Pas rregullimit të barazimeve e fitojmë sistemin e barazimeve lineare
$$\begin{cases} 2a_1 + 19d = 23 \\ a_1 + 3d = 5 \end{cases}.$$

Zgjidhja e sistemit është $a_1 = 2$ dhe $d = 1$.

Progresioni aritmetik i kërkuar është 2, 3, 4, ..., 21.

Shembulli 5. Te një progresion aritmetik me numër tek të anëtarëve anëtari i mesëm është 15, ndërsa shuma e të gjithë anëtarëve është 135. Cakto numrin e anëtarëve.

Zgjidhje: Prej kushtit të detyrës $S_n = 135$ dhe anëtarit të mesëm të progresionit aritmetik me numër tek të anëtarëve është i barabartë me $\frac{a_1 + a_n}{2} = 15$.

Me zëvendësim te formula për shumën e n -anëtarëve të parë të progresionit aritmetik

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = n \frac{a_1 + a_n}{2} \text{ e fitojmë barazimin } 135 = n \cdot 15 \text{ d.m.th., } n = 9.$$

Detyra për ushtrime:

1. Sa është anëtari i 25 dhe shuma e 25 anëtarëve të parë prej vargut 5, 9, 13,...
2. Cakto progresionin aritmetik, nëse $5a_1 + 10a_5 = 0$ dhe $S_4 = 14$.
3. Sa anëtar ka progresioni aritmetik i fundshëm për të cilin $a_1 = 7$, $d = 5$ dhe $S_n = 243$
4. Zgjidhe barazimin $3 + 7 + 11 + \dots + x = 210$.
5. Të njehsohet shuma e 100 anëtarëve të parë të progresionit aritmetik, nëse anëtari i parë është 7, ndërsa anëtari i 100 është 53.
6. Shuma prej 40 000 denarë është ndarë në 10 persona ashtu që çdo person i ardhshëm fiton 500 denarë më shumë prej paraardhësit. Sa denarë ka marrë personi i parë, ndërsa sa person ii fundit?
7. Firma "AA" për prodhimin e kabllave në vitin 2015 ka prodhuar 70000 m kablllo. Nëse çdo vit firma e zmadhon prodhimin e kablllos për 500 m, atëherë të caktohet sa metro kablllo do të prodhon në vitin 2025 dhe sa është prodhuar gjithë periudhës.
8. Të gjendet anëtari i përgjithshëm i progresionit aritmetik, nëse anëtari i parë është 10 dhe shuma e dyzet anëtarëve të parë është 1050.
9. Anëtari i katërt i një progresioni aritmetik është 9, ndërsa anëtari i nëntë është -6. Sa anëtar duhet të mblidhen që shuma të jetë 54.
10. Sa anëtar prej progresionit aritmetik 30, 27, 24, ... duhet të mblidhen që shuma e tyre të jetë e barabartë me 0.
11. Shuma e nëntë anëtarëve të parë të një progresioni aritmetik është 144, ndërsa shuma e shtatë anëtarëve vijues është 368. Gjeje progresionin!

4. PROGRESIONI GJEOMETRIK

Shembulli 1. Janë dhënë vargjet:

a) $1, 2, 4, 8, 16, \dots$

c) $5, -10, 20, -40, 80, \dots$

d) $5, 5, 5, \dots$

b) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

ç) $99, 33, 11, \frac{11}{3}, \frac{11}{9}, \dots$

Të caktohet herësi i çdo anëtari dhe anëtarit paraprak duke filluar prej të dytit.

Zgjidhje:

Mund të vërehet se herësi ndërmjet çdo anëtari dhe paraardhësit të tij, duke filluar prej të dytit është konstant dhe është:

a) 2,

b) $\frac{1}{2}$,

c) -2,

ç) $\frac{1}{3}$,

d) 1.

Përkufizim: Vargu $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$ për të cilin vlen herësi ndërmjet dy anëtarëve fqinj duke filluar prej të dytit është numër konstant q quhet varg gjeometrik ose progresion gjeometrik

$$a_{n+1} : a_n = q \text{ për çdo } n \in \mathbb{N}$$

Shembulli 2: Është dhënë vargu $1, 2, 4, 8, 16, \dots$ Të caktohet anëtari i përgjithshëm i vargut dhe herësi i çdo anëtari dhe paraardhësit të tij, duke filluar prej anëtarit të dytë. Si quhet vargu?

Zgjidhje: Anëtari i përgjithshëm i vargut është $a_n = 2^{n-1}$.

$$\text{E njehsojmë herësin: } \frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{1} = 2, \frac{a_3}{a_2} = \frac{4}{2} = 2, \frac{a_4}{a_3} = \frac{8}{4} = 2, \dots, \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{2^{n-1}}{2^{n-2}} = 2$$

Herësi është konstant dhe ai është $q = 2$.

Për këtë varg themi se është **progresion gjeometrik**.

Prej shembullit 1, në pajtim me përkufizimin mund të vërehet se progresioni gjeometrik për $a_1 > 0$ është monotono rritës nëse

$q > 1$, monotono zvogëlues nëse $0 < q < 1$, është varg konstant nëse $q = 1$, ndërsa as rritet, as zvogëlohet $q < 0$.

Për progresionin gjeometrik ku $a_1 < 0$ e monotonisht rritet nëse $0 < q < 1$, monotonisht zvogëlohet nëse $q > 1$, është varg konstant nëse $q = 1$, as rritet, as zvogëlohet $q < 0$.

Në përgjithësi, le të jetë dhënë progresioni gjeometrik $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots$ Prej përkufizimit për progresion gjeometrik vijon se:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = q$$

Prej barazimit:

$$\frac{a_2}{a_1} = q, \text{ d.m.th., } a_2 = a_1 q,$$

$$\frac{a_3}{a_2} = q, \text{ d.m.th., } a_3 = a_2 q = a_1 q \cdot q = a_1 q^2,$$

$$\frac{a_4}{a_3} = q, \text{ d.m.th., } a_4 = a_3 q = a_1 q^2 \cdot q = a_1 q^3 \dots$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q, \text{ d.m.th., } a_n = a_{n-1} q, \text{ te barazimi për anëtarin } n \text{ fitohet } a_n = a_1 q^{n-1}$$

Teorema: Për anëtarin e përgjithshëm të progresionit gjeometrik vlen $a_n = a_1 q^{n-1}$

Shembulli 3. Anëtari i parë i progresionit gjeometrik është 3, ndërsa anëtari i shtatë është 192. Të caktohen 7 anëtarët e parë të progresionit gjeometrik.

Zgjidhje: Prej kushtit të detyrës $a_1 = 3$ dhe $a_7 = 192$.

Prej teoremës për progresion gjeometrik, vijon

$$a_7 = a_1 \cdot q^6, \quad 192 = 3 \cdot q^6, \quad q^6 = 64, \quad q = \pm 2$$

Nëse $q = 2$, atëherë progresioni gjeometrik është 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, ...,

ndërsa nëse $q = -2$, atëherë progresioni gjeometrik është 3, -6, 12, -24, 48, -96, 192,

Shembulli 4. Anëtari i parë i progresionit gjeometrik është 3, herësi është 4, ndërsa 3072 është njëri prej anëtarëve të tij. Cili është numri i tij rendor te vargu?

Zgjidhje: Prej kushtit të detyrës $a_1 = 3$, $q = 4$ dhe $a_n = 3072$.

Prej përkufizimit $a_n = a_1 q^{n-1}$ me zëvendësim kemi $3072 = 3 \cdot 4^{n-1} \Rightarrow 1024 = 4^{n-1} \Rightarrow 4^5 = 4^{n-1}$.

Prej ku vijon se $n - 1 = 5$, d.m.th., $n = 6$.

Vijon, anëtari i dhënë është i gjashti me radhë.

Shembulli 5. Njehso anëtarin e parë dhe herësin e progresionit gjeometrik, nëse $a_3 = -\frac{1}{4}$ dhe $a_6 = \frac{1}{32}$.

Zgjidhje: Prej $a_3 = a_1 q^2$ dhe $a_3 = -\frac{1}{4}$, vijon $a_1 q^2 = -\frac{1}{4}$.

Prej $a_6 = a_1 q^5$ dhe $a_6 = \frac{1}{32}$, vijon $a_1 q^5 = \frac{1}{32}$.

Kemi sistem prej dy barazimeve me dy ndryshore

$$\begin{cases} a_1 q^2 = -\frac{1}{4} \\ a_1 q^5 = \frac{1}{32} \end{cases}.$$

Nëse këto dy barazime i pjesëtojmë, fitohet $\frac{a_1 q^2}{a_1 q^5} = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{32}} \Rightarrow \frac{1}{q^3} = -8$ prej ku vijon se $q^3 = -\frac{1}{8}$

d.m.th., $q = \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = -\frac{1}{2}$.

Te barazimi i parë e zëvendësojmë vlerën e herësit $a_1 \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4} \Rightarrow a_1 = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = -1$.

Fitojmë se vargu ka anëtar të parë $a_1 = -1$ dhe herës $q = -\frac{1}{2}$.

Shembulli 6. Shkruaj gjashtë anëtarët e parë të progresionit gjeometrik nëse $a_5 + a_7 = 240$ dhe $a_4 + a_6 = 120$.

Zgjidhje: Prej kushtit të detyrës e kemi sistemin e barazimeve lineare

$$\begin{cases} a_5 + a_7 = 240 \\ a_4 + a_6 = 120 \end{cases}$$

dhe me zëvendësim te formula për anëtarin n të progresionit gjeometrik $a_n = a q^{n-1}$, e fitojmë

sistemin e barazimeve me dy ndryshore

$$\begin{cases} a_1 q^4 + a_1 q^6 = 240 \\ a_1 q^3 + a_1 q^5 = 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 q^4 (1 + q^2) = 240 \\ a_1 q^3 (1 + q^2) = 120 \end{cases}.$$

Me pjesëtim të barazimeve $\frac{a_1 q^4 (1 + q^2)}{a_1 q^3 (1 + q^2)} = \frac{240}{120}$, kemi $q = 2$.

Me zëvendësimin e vlerës së herësit te barazimi i parë, fitohet vlera e anëtarit të parë d.m.th.,

$$a_1 \cdot 2^4 (1 + 2^2) = 240 \Rightarrow a_1 = \frac{240}{80} = 3$$

I kërkuar është: 3,6,12, 24, 48,96,...

Shembulli 7. Të njehsohet numri i banorëve të një qyteti pas 10 vjet, nëse çdo vit numri i banorëve zvogëlohet për 1%, ndërsa tani ka 60 000 banor.

Zgjidhje: Prej kushtit të detyrës vijon se zvogëlimi realizohet sipas parimit të progresionit gjeometrik. Anëtar i parë i progresionit gjeometrik është $a_1 = 60000$. Pasi zvogëlimi është $p = 1\%$, për herësin e progresionit gjeometrik kemi $q = 1 - \frac{p}{100}$, vijon $q = 1 - \frac{1}{100} = 1 - 0,01 = 0,99$ dhe pasi kërkohet pas 10 vjet $n = 11$. (Tani qyteti ka a_1 banorë, pas 1 viti numri i banorëve është a_2 , ..., pas 10 vjet numri i banorëve është a_{11} .)

$$\text{Prej } a_{11} = a_1 q^{10}, \text{ vijon } a_{11} = 60000 \cdot 0,99^{10} \Rightarrow a_{11} = 54263$$

Fitohet se qyteti pas 10 vjet do të ketë 54 263 banor.

Shembulli 8. Ndërmjet numrave 10 dhe 160 fut (interpolo) tre numra, të cilët së bashku me anëtarët e dhënë formojnë progresion gjeometrik.

Zgjidhje: Prej kushteve të dhëna ndërmjet numrave 10 dhe 160 duhet të fusësh 3 numra, ndërsa do të formohet progresion gjeometrik 10, $_, _, _, 160$. Vijon $a_1 = 10$ dhe $a_5 = 160$.

$$a_5 = a_1 q^4, \text{ me zëvendësim kemi } 160 = 10 \cdot q^4 \Rightarrow q^4 = 16 \Rightarrow q = \pm 2.$$

Ekzistojnë dy vargje gjeometrike, ndërsa atë:

Nëse $q = 2$, atëherë vargu është 10, 20, 40, 80, 160,

Nëse $q = -2$, atëherë vargu është 10, -20, 40, -80, 160.

Shembulli 9. Eksporti i përgjithshëm i metaleve prej sipërmarrjes “AA” në muajin janar dhe mars kanë sjell profit prej 1 300 000 \$, ndërsa në muajin shkurt dhe prill ka sjell profit prej 2 600 000 \$. Nëse profitin e zmadhojmë si progresion gjeometrik të caktohet produktiviteti në katër muajt e parë.

Zgjidhje: Le të jetë a_n profiti në muajin n , $n = 1, 2, 3, 4$.

Prej kushti të detyrës, vijon

$$\begin{cases} a_1 + a_3 = 1300000 \\ a_2 + a_4 = 2600000 \end{cases}$$

Prej teoremës vijon: $a_2 = a_1 \cdot q$, $a_3 = a_1 \cdot q^2$ dhe $a_4 = a_1 \cdot q^3$

Me zëvendësimin te sistemi kemi

$$\begin{cases} a_1(1+q^2) = 1300\,000 \\ a_1q(1+q^2) = 2\,600\,000 \end{cases}$$

Me zëvendësimin e barazimit të parë te barazimi i dytë kemi: $1300\,000q = 2\,600\,000$.

Kemi se $q = 2$, ndërsa anëtari i parë i progresionit është $a_1 = 260\,000$.

Vijon

$$a_1 = 260\,000 \$ \text{ janar,}$$

$$a_2 = 260\,000 \cdot 2 = 520\,000 \$ \text{ shkurt,}$$

$$a_3 = 260\,000 \cdot 2^2 = 1\,040\,000 \$ \text{ mars,}$$

$$a_4 = 260\,000 \cdot 2^3 = 2\,080\,000 \$ \text{ prill.}$$

Detyra për ushtrime:

1. Të gjendet anëtari i 10 i progresionit gjeometrik 8, 4, 2,...
2. Të njehsohet anëtari 20 i progresionit gjeometrik: 1, 3, 9, 27, ...
3. Gjeje anëtarin e parë të progresionit gjeometrik me herës 4 dhe anëtari i tetë 256.
4. Anëtari i katër i një progresionit gjeometrik është 162, ndërsa anëtari i gjashtë është 1458. Të njehsohet anëtari i parë dhe herësi.
5. Gjeje progresionin gjeometrik nëse $160 a_7 + a_5 = 80$ dhe $a_6 + a_4 = -80$.
6. Të njehsohet numri b ashtu që 3, b , 75 të formon progresion gjeometrik.
7. Ndryshimi ndërmjet anëtarit të gjashtë dhe të katërt është 72, ndërsa ndryshimi ndërmjet anëtarit të tretë dhe të parë është 9. Gjeje progresionin gjeometrik.
8. Shuma e tre anëtarëve të një progresionin gjeometrik është 6, ndërsa shuma e anëtarit të dytë, të tretë dhe të katërt është -3. Gjeje progresionin gjeometrik.
9. Shuma e dy anëtarëve të parë të një progresionin gjeometrik është 15, ndërsa shuma e dy vijuesve është 60. Njehso anëtarin e parë dhe herësin e progresionit gjeometrik.
10. Ndryshimi i anëtarit të tretë dhe të parë të një progresioni gjeometrik është 24, ndërsa ndryshimi i anëtarit të pestë dhe të parë është 624. Njehso anëtarin e parë dhe herësin e progresionit gjeometrik.
11. Shkruaj pesë anëtarët e parë të progresionit gjeometrik nëse $a_3 - a_2 + a_1 = 13$ dhe $a_5 + a_2 = 78$.

5. SHUMA E N-ANËTARËVE TË PARË TË PROGRESIONIT GJEOMETRIK

Le të jetë dhënë progresioni gjeometrik me numër të fundshëm të anëtarëve 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128.

Anëtarët 2 dhe 64, 4 dhe 32, 8 dhe 16, janë një lloj të larguar prej anëtarëve të skajshëm 1 dhe 128. Për prodhimin e anëtarëve vlen se $1 \cdot 128 = 2 \cdot 64 = 4 \cdot 32 = 8 \cdot 16 = 128$.

Vetia 1. Për progresionin gjeometrik të fundshëm prodhimi i çdo dy anëtarëve një lloj të larguar prej anëtarit të parë dhe të fundit është i barabartë me prodhimin e anëtarëve të skajshëm, d.m.th.,

$$a_k \cdot a_{n-(k-1)} = a_1 \cdot a_n, \quad 2 \leq k \leq n$$

$$\text{Vërtetim: } a_k = a_1 q^{k-1} \text{ dhe } a_{n-(k-1)} = a_1 q^{(n-(k-1)-1)} = a_1 q^{(n-k)}$$

Për prodhimin e tyre kemi

$$a_k \cdot a_{n-(k-1)} = a_1 q^{(k-1)} \cdot a_1 q^{(n-k)} = a_1 \cdot a_1 \cdot q^{(k-1+n-k)} = a_1 \cdot \underbrace{a_1 q^{(n-1)}}_{a_n} = a_1 \cdot a_n \text{ që duhej të vërtetohet.}$$

Ta shqyrtojmë përsëri progresionin e njëjtë gjeometrik, ndërsa tani le të jetë me anëtar të pafundshëm, d.m.th., 11, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ..., 2^{n-1} , ...

Që vlen për të gjithë anëtarët e këtij progresioni?

$$2^2 = 1 \cdot 4, \quad 4^2 = 2 \cdot 8, \quad 8^2 = 4 \cdot 16, \quad 16^2 = 8 \cdot 32, \dots$$

Vërejmë se katrori i çdo anëtarit të progresionit, përveç të parit, është prodhim i anëtarëve fqinj.

Vetia 2. Çdo anëtar prej një progresioni gjeometrik, përveç të parit, është mesi gjeometrik i anëtarit para tij dhe anëtarit pas tij të progresionit

$$a_k^2 = a_{k-1} \cdot a_{k+1} \text{ d.m.th., } a_k = \sqrt{a_{k-1} \cdot a_{k+1}} \text{ për } k > 1, k \in N.$$

Vërtetim: Le të jenë a_{k-1}, a_k, a_{k+1} tre anëtarë të njëpasnjëshëm të një progresioni gjeometrik.

Sipas përkufizimit për progresionin gjeometrik vlen, prej ku vijon se $\frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{a_{k+1}}{a_k}$

$$a_k^2 = a_{k-1} \cdot a_{k+1} \text{ d.m.th., } a_k = \sqrt{a_{k-1} \cdot a_{k+1}}, \text{ për } k > 1, k \in N, \text{ që duhej të vërtetohet.}$$

$$a_1 \neq -1, 1 \text{ dhe } q \neq -1.$$

Vetia mund të përgjithësohet dhe të vlen:

Vetia 3. Çdo anëtar i progresionit gjeometrik është mesi gjeometrik i çdo çifti prej vargut që është një lloj i larguar prej tij.

Ta shqyrtojmë progresionin gjeometrik 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, ...

Për numrin 16 vlen $16^2 = 8 \cdot 32$, $16^2 = 4 \cdot 64$, $16^2 = 2 \cdot 128$, $16^2 = 1 \cdot 256$, ...

Le të jetë dhënë progresioni gjeometrik me $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$ me herësin q . Shuma e n -anëtarëve të parë të progresionit gjeometrik shënohet me S_n është:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \text{ d.m.th., } S_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

$a_1 \neq -1$, 1 dhe $q \neq -1$.

Shembulli 1. Të caktohet shuma e 10 anëtarëve të parë të progresionit gjeometrik 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, ...

Zgjidhje:

$$S_{10} = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 = 1023$$

Për të mos shënohen të gjithë anëtarët e progresionit gjeometrik, pra pastaj të caktohet shuma e tyre, do ta shkruajmë formulën për shumën të n -anëtarëve të parë të progresionit gjeometrik.

Teorema: Shuma e n -anëtarëve të parë të progresionit gjeometrik $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$ caktohet me:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad q \neq 1$$

Vërtetim:

Shuma e n -anëtarëve të parë të progresionit gjeometrik le të jetë

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

dhe nëse zëvendësohet formula për n -anëtarët të progresionit gjeometrik kemi

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1}.$$

Nëse barazia shumëzohet me q dhe rregullohen anëtarët kemi

$$qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 \dots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n.$$

Tani, nëse prej barazimit të dytë i zbrisim anët përkatëse prej barazimit të parë, kemi

$$qS_n - S_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 \dots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n - a_1 - a_1 q - a_1 q^2 - \dots - a_1 q^{n-2} - a_1 q^{n-1} \text{ d.m.th.,}$$

$$qS_n - S_n = a_1 q^n - a_1,$$

$$\text{Vijon } S_n(q-1) = a_1(q^n - 1).$$

Nëse e shprehim S_n e fitojmë formulën për shumën e n -anëtarëve të parë të progresionit gjeometrik $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$, $q \neq 1$, që duhet të vërtetohet.

Shembulli 2. Cakto shumën e 20 anëtarëve të parë të progresionit gjeometrik 3, 6, 12, ...

Zgjidhje: Prej progresionit të dhënë mund të caktojmë se $a_1 = 3$ dhe $q = 2$. me zëvendësimin te formula $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ fitohet,

$$S_{20} = 3 \cdot \frac{2^{20} - 1}{2 - 1} = 3(1048576 - 1) = 3\,145\,725.$$

Shembulli 3. Të caktohet anëtari i parë i progresionit gjeometrik me herës $q = -\frac{1}{2}$, nëse shumën e dhjetë anëtarëve të parë është $\frac{1023}{512}$.

Zgjidhje: Prej $S_{10} = a_1 \frac{q^{10} - 1}{q - 1}$ kemi,

$$\frac{1023}{512} = a_1 \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{10} - 1}{-\frac{1}{2} - 1} \Rightarrow \frac{1023}{512} = a_1 \frac{1 - 1024}{-\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{1023}{512} = a_1 \frac{341}{512}, \text{ d.m.th., } a_1 = 3.$$

Shembulli 4. Shuma e gjashtë anëtarëve të parë të progresionit gjeometrik, me herës 3, është 728. Njehso anëtarin e nëntë të progresionit gjeometrik.

Zgjidhje:

$$\text{Prej } S_6 = a_1 \frac{q^6 - 1}{q - 1} \text{ kemi } 728 = a_1 \frac{3^6 - 1}{3 - 1} \Rightarrow 728 = a_1 \cdot 364, \text{ d.m.th., } a_1 = 2.$$

Anëtarin e nëntë të progresionit gjeometrik do ta caktojmë prej formulës $a_9 = a_1 q^8$. Me zëvendësim fitojmë $a_9 = 2 \cdot 3^8 = 13\,122$.

Shembulli 5. Sa anëtar prej progresionit gjeometrik duhet të mbledhen për të fituar shumën 262145, nëse anëtari i parë është 5, ndërsa herës është -4.

Zgjidhje: Prej kushtit të detyrës $S_n = 262145$, $a_1 = 5$ dhe $q = -4$, me zëvendësimin te formula $S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$ kemi $262145 = 5 \cdot \frac{(-4)^n - 1}{-4 - 1}$.

$$\text{Vijon } 262145 = \frac{(-4)^n - 1}{-1} \Rightarrow -262144 = (-4)^n \Rightarrow (-4)^n = (-4)^9 \text{ kemi } n = 9$$

Shembulli 6. Shuma e katër anëtarëve të parë të progresionit gjeometrik është 40, ndërsa shuma e katër anëtarëve vijues është 3240. Cakto anëtarët e progresionit.

Zgjidhje: Prej kushti të detyrës kemi $S_4 = 40$ dhe $S_8 - S_4 = 3240$. Me zbatimin e formulës për n -anëtarët e progresionit gjeometrik kei sistemin e barazimeve,

$$\begin{cases} a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 = 40 \\ (a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + a_1q^4 + a_1q^5 + a_1q^6 + a_1q^7) - (a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3) = 3240 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 = 40 \\ a_1q^4 + a_1q^5 + a_1q^6 + a_1q^7 = 3240 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1(1 + q + q^2 + q^3) = 40 \\ a_1q^4(1 + q + q^2 + q^3) = 3240 \end{cases}$$

Nëse e pjesëtojmë barazimin e dytë me barazimin e parë kemi

$$\frac{a_1q^4(1 + q + q^2 + q^3)}{a_1(1 + q + q^2 + q^3)} = \frac{3240}{40} \Rightarrow q^4 = 81 \text{ d.m.th., } q = \pm 3.$$

Vijon, për $q = 3$, prej barazimit të parë $a_1(1 + q + q^2 + q^3) = 40$ kemi $a_1(1 + 3 + 3^2 + 3^3) = 40$, d.m.th., $a_1 = 1$. Progresioni gjeometrik është: 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187.

Vijon, për $q = -3$, prej barazimit të parë $a_1(1 + q + q^2 + q^3) = 40$ kemi $a_1(1 + (-3) + (-3)^2 + (-3)^3) = 40$ d.m.th., $a_1 = -2$. Progresioni gjeometrik është: -2, 6, -18, 54, -162, 486, -1458, 4374.

Shembulli 7. Duhet të ndahen 74 416 denarë 5 personave të cilët kanë punuar në një projekt, ashtu që çdo pasardhës te lista do të marrë 20% më shumë prej personit paraardhës. Nga sa denarë do të fitojë çdo person?

Zgjidhje: Prej kushtit të detyrës kemi se shuma e përgjithshme është $S_5 = 74416$, $n = 5$ dhe se zmadhimi realizohet sipas parimit të progresionit gjeometrik, ku herësin do ta njehsojmë sipas formulës $q = 1 + \frac{p}{100}$, ku $p = 20\%$, ndërsa për $q = 1 + \frac{20}{100} = 1,2$.

Nëse zëvendësojmë te formula për shumën $S_5 = a_1 \frac{q^5 - 1}{q - 1} \Rightarrow 74416 = a_1 \frac{1,2^5 - 1}{1,2 - 1}$, atëherë

$$74416 = a_1 \cdot 7,4416, \text{ d.m.th., } a_1 = 10000$$

Kemi se personi i parë do të fitojë 10 000 denarë. Duke e shfrytëzuar përkufizimin për caktimin e anëtarit n të progresionit gjeometrik mund t'i fitojmë këto vlera për shumën që do ta fitojë çdo person, ndërsa atë $a_1 = 10000$, personi i dytë $a_2 = a_1 q = 10000 \cdot 1,2 = 12000$, personi i tretë $a_3 = a_2 q = 12000 \cdot 1,2 = 14400$, personi i katërt $a_4 = a_3 q = 14400 \cdot 1,2 = 17280$ dhe personi i pestë $a_5 = a_4 \cdot q = 17280 \cdot 1,2 = 20736$ denarë.

Detyra për ushtrime:

1. Anëtari i fundit të një progresioni gjeometrik është 112, shuma e anëtarëve është 217, ndërsa herësi është 2. Të njehsohet anëtari i parë.

2. Të njehsohet shuma e 10 anëtarëve të parë të progresionit gjeometrik: -1, 3, -9,

3. Të njehsohet shuma e 8 anëtarëve të parë të progresionit gjeometrik 6, 12, 24, ...

4. Të gjendet shuma e 15 anëtarëve të parë të progresionit gjeometrik me anëtarin e parë $a_1 = -2$ dhe herësin $q = 2$.

5. Automobili është blerë për 10 000 euro. Vlera e automobilit zvogëlohet për 10% në vit, duke llogaritur prej fillimit të vitit.

Sa do të kushtojë automobili në fund të vitit të 4?

6. Të caktohen q dhe n te progresioni gjeometrik për të cilin $a_1 = 2$, $a_n = 64$, $S_n = 126$

7. Njehso a_n dhe n te progresioni gjeometrik nëse: $a_1 = 2$, $q = -3$, $S_n = -364$.

8. a) Njehso a_1 dhe S_5 te progresioni gjeometrik nëse: $a_5 = \frac{2}{27}$, $q = -\frac{2}{3}$.

b) Njehso S_n dhe n te progresioni gjeometrik nëse: $a_1 = \frac{1}{64}$, $q = -\frac{4}{3}$, $a_n = -\frac{16}{243}$.

9. Njehso a_1 , q dhe n te progresioni gjeometrik nëse:

$$a_6 - a_4 = 216, a_3 - a_1 = 8, S_n = 40.$$

10. Tre numra formojnë progresion gjeometrik. Shuma e tyre është e barabartë me shumën e vlerave të tyre reciproke dhe është $\frac{7}{2}$. Cilat janë ato numra?

11. Shifrat e një numri treshifror formojnë progresion gjeometrik. Shuma e shifrës së parë dhe të tretë është për 7 më e madhe se shifra e dhjetësheve. Nëse shifrat prej numrit shkruhen në renditjen e anasjelltë numri i ri treshifror do të jetë më i madh për 792. Cili është ai numër?

6. VLERA KUFITARE E VARGUT

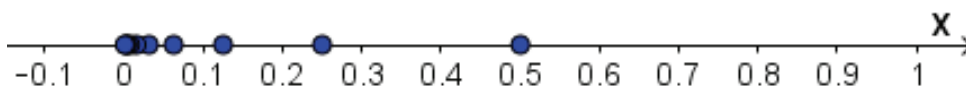
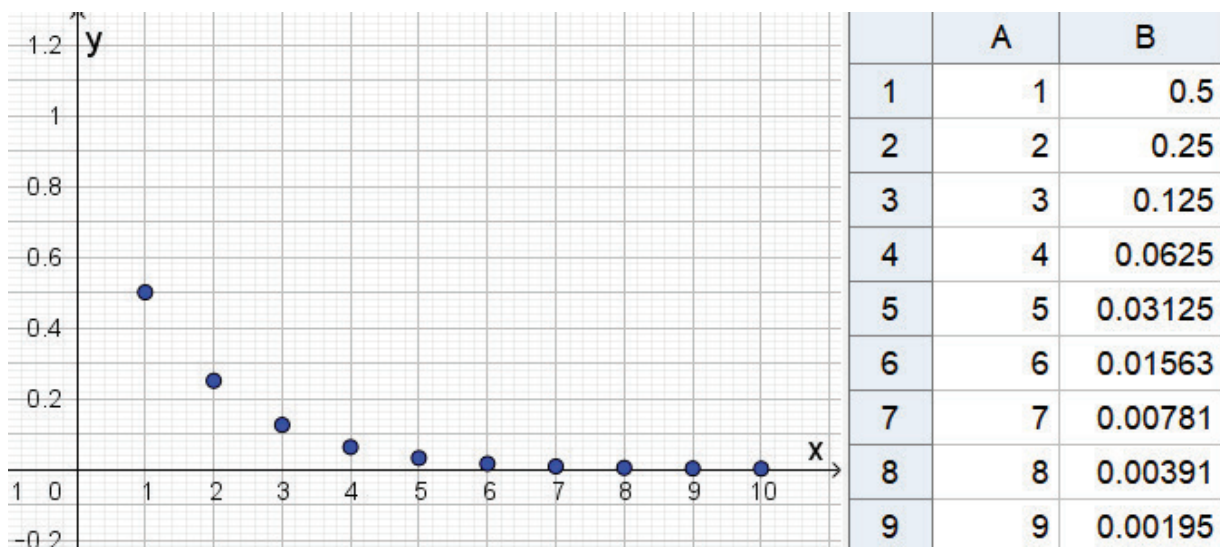
Çka ndodh me vargun me anëtarin e përgjithshëm (a_n) kur n vazhdimisht rritet?

Shembulli 1. Të gjenden pesë anëtarët e parë të vargut dhe të paraqiten te sistemi koordinativ dhe te boshti numerik:

a) $a_n = \frac{1}{2^n}$ b) $a_n = (-1)^n$ c) $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ ç) $a_n = (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$ d) $a_n = 2^n$

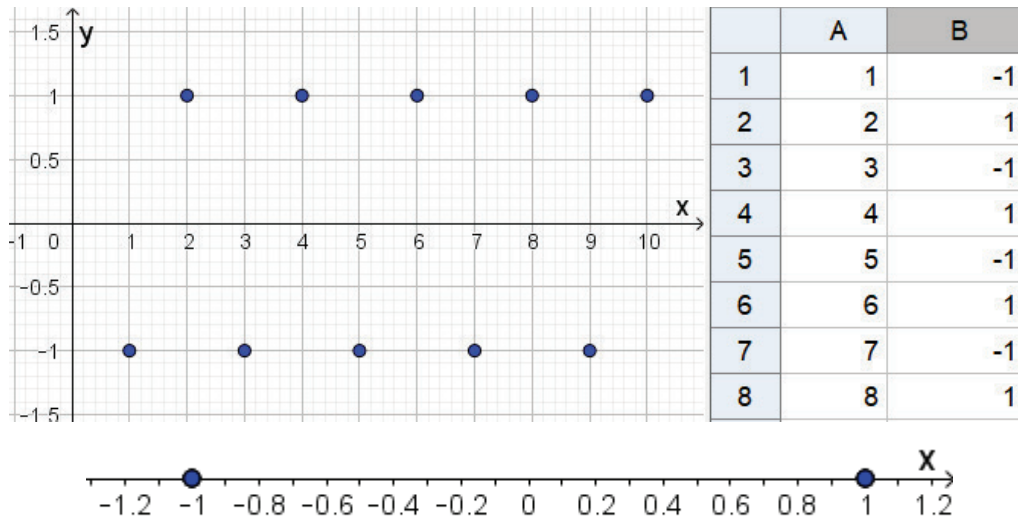
Zgjidhje:

a) Pesë anëtarët e parë të vargut me anëtarin e përgjithshëm $a_n = \frac{1}{2^n}$, janë: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$, të paraqitur në sistemi koordinativ dhe boshtin numerik janë:



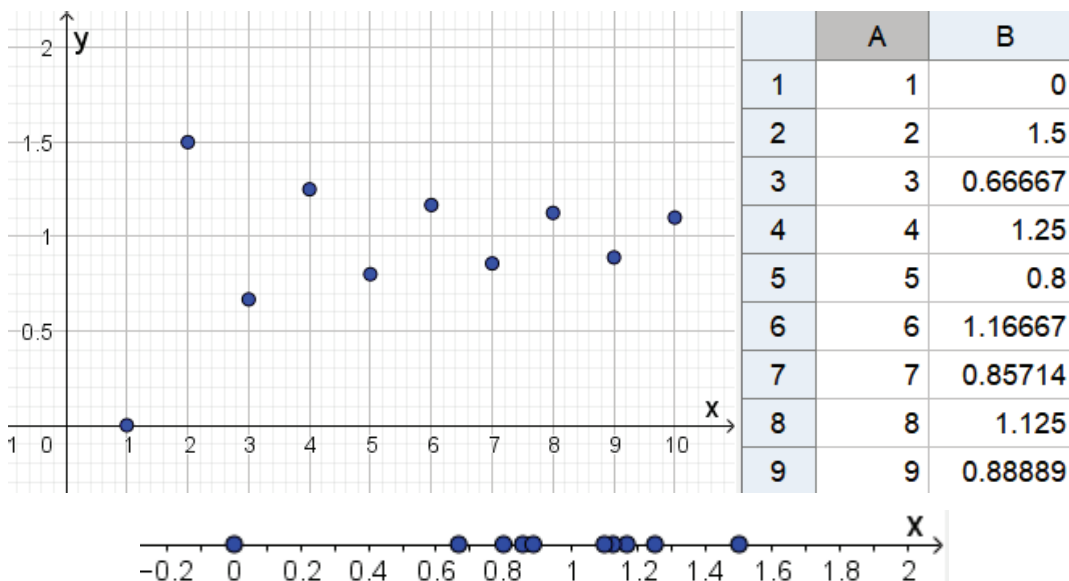
Mund të vërejmë se sikurse rritet vlera e n -anëtarëve e vargut bëhen më të vogla dhe më shumë afrohen kah 0 te boshti numerik, d.m.th., grumbullohen rreth 0. (te sistemi koordinativ pikat afrohen deri te boshti x)

b) Pesë anëtarët e parë të vargut me anëtarin e përgjithshëm $a_n = (-1)^n$, ce: $-1, 1, -1, 1, -1, \dots$, të paraqitur te sistemi koordinativ dhe boshti numerik janë:



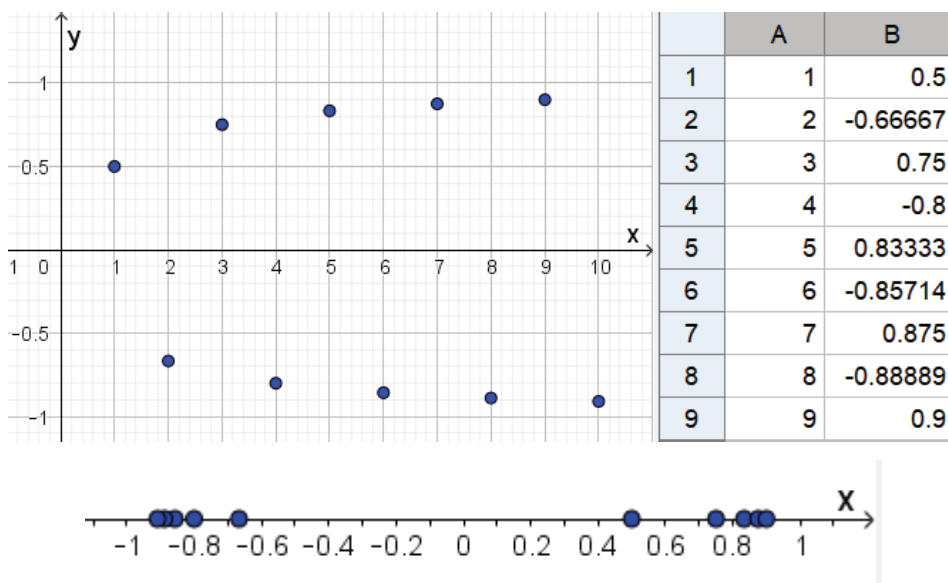
Mund të vërejmë se sikurse rritet vlera e n -anëtarët e vargut -1 ose, ndërsa atë anëtarët me indeks tek janë -1, ndërsa anëtarët me indeks çift janë 1. Anëtarët grumbullohen te -1 ose 1 te boshti numerik. (Anëtarët grumbullohen te -1 ose 1 të boshtit numerik. (te sistemi koordinativ pikat janë me koordinatën e dytë -1 ose 1).

c) Pesë anëtarët e parë të vargut me anëtarin e përgjithshëm $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$, janë: $0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \dots$, të paraqitur në sistemin koordinativ dhe boshtin numerik janë:



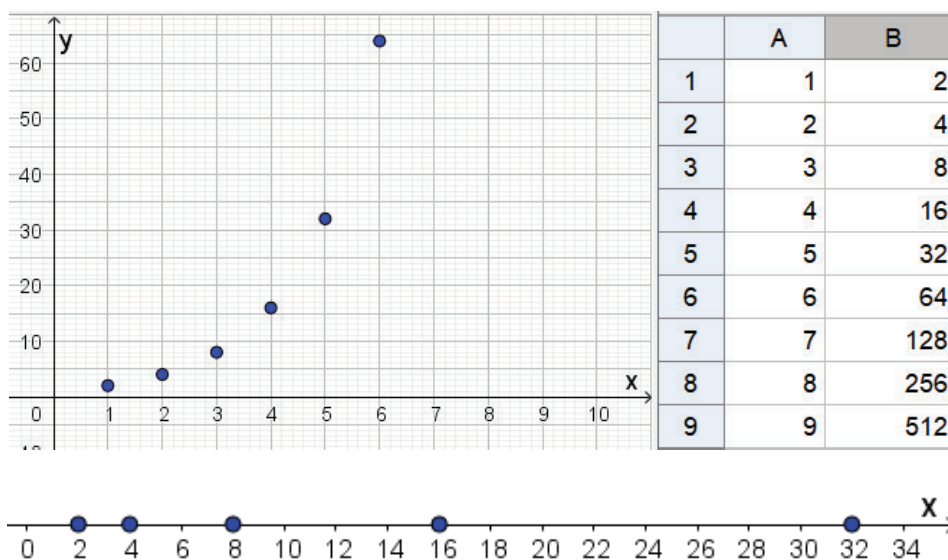
Mund të vërejmë se rritja e n -anëtarëve të vargut janë shpërndarë në mënyrë alternative prej anës së majtës ose të djathtë të pikës 1, d.m.th., anëtarët grumbullohen rreth 1. (në sistemin koordinativ pikat afrohen deri te drejtëza $y = 1$).

c) Pesë anëtarët e vargut me anëtarin e përgjithshëm $a_n = (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$ janë $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$, të paraqitur në sistemin koordinativ dhe boshtin numerik janë:



Mund të vërejmë se sikurse që rritet vlera e n -anëtarët e vargut afrohen kah 1 ose -1, ndërsa atë anëtarët me indeks tek kah 1, ndërsa anëtarët me indeks çift kah -1. Anëtarët grumbullohen në 1 ose -1 te boshti numerik. (në sistemin koordinativ pikat afrohen deri te drejtëzat $y = 1$ ose $y = -1$).

d) Pesë anëtarët e parë të vargut me anëtarin e përgjithshëm $a_n = 2^n$, janë: 2, 4, 8, 16, 32, ..., të paraqitur në sistemin koordinativ dhe boshtin numerik janë:



Mundemi të vërejmë se sikurse që rritej vlera e n , anëtarët e vargut janë më të mëdha, ndërsa nuk ka pikë kah e cila grumbullohen. (në sistemin koordinativ pikat largohen prej boshtit të x).

Përkufizim: Çdo interval i hapur $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, ku ε është numër real pozitiv quhet **ε -rrethina e pikës A** prej boshtit numerik, përkatësisht ε -rrethina e numrit real a , që i përgjigjet pikës A .



Përkufizim: Numri real a është **pika e grumbullimit** të vargut (a_n) nëse për çdo numër real $\varepsilon > 0$, pafund shumë anëtarë të vargut i takojnë intervalit $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Prej shembullit 1,

vargu nën a) ka një pikë të grumbullimit 0, pasi pafund shumë anëtarë të vargut i takojnë intervalit $(0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon)$.

vargu nën b) ka dy pika të grumbullimit: -1 dhe 1, pasi shumë anëtarë të vargut ka intervali $(-1 - \varepsilon, -1 + \varepsilon)$ dhe në intervalin $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$.

vargu nën c) ka një pikë të grumbullimit 1, pasi pafund shumë anëtarë të vargut i takojnë intervalit $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$

vargu nën ç) ka dy pika të grumbullimit: 1 dhe -1, pasi shumë anëtarë të vargut ka intervali $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ dhe në intervalin $(-1 - \varepsilon, -1 + \varepsilon)$, dhe

vargu nën d) nuk ka pika të grumbullimit.

Përfundimet e fituara sipas tregimit vizuel dhe nuk do të vërtetohen.

Përkufizim: Për vargun (a_n) themi se është **konvergjent** (ka **vlerë kufitare**) nëse ekziston numër real $a \in R$, ashtu që për çdo $\varepsilon > 0$, ekziston numër real $n_0(\varepsilon)$ ashtu që për $n > n_0$ kënaqet pabarazia $|a_n - a| < \varepsilon$.

Për numrin real a themi se është **vlera kufitare** e vargut (a_n) dhe shkruajmë $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon) \in N)(\forall n \geq n_0(\varepsilon)) |a_n - a| < \varepsilon$$

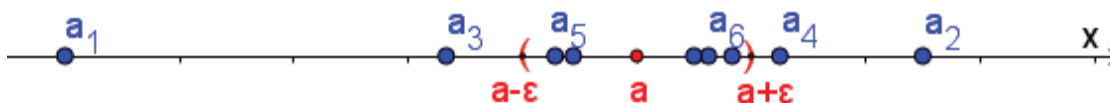
Mund të shruhet edhe përkufizimi ekuivalent.

Përkufizim: Numri a është vlera kufitare e vargut (a_n) ku n tenton në pakufi nëse dhe vetëm nëse në çfarëdo rrethinë ε të pikës a gjenden pafund shumë anëtarë të vargut, ndërsa jashtë asaj rrethine mund të ketë vetëm numër të fundshëm të anëtarëve.

Shkruhet formula:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

Prej përkufizimit del se nëse vargu ka vlerë kufitare, atëherë pafund shumë anëtarë pas n_0 , duke filluar prej $a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, a_{n_0+3}, \dots$ gjenden në brendësinë e intervalit, por vetëm numër i fundshëm i anëtarëve (anëtarët e parë n_0) $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ janë jashtë këtij intervali. Numri a është njëkohësisht edhe pika e grumbullimit të vargut.



Përkufizim: Vargu (a_n) që nuk konvergjon quhet varg jokolinear.

Për vargun (a_n) që ka vlerë kufitare $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ ose $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ quhet varg divergjent.

Sjellja e vargjeve në lidhje me Konvergjencën mund të vërehet në këtë infografik:

Vargu			
Konvergjon	Nuk konvergjon		
	Divergjon	Divergjon në mënyrë të pacaktuar	
	Divergjon kah $+\infty$	Divergjon kah $-\infty$	Oscilon përfundimisht
			Oscilon pafundësisht

Shembull për vargje jokonvergjente:

Për vargun të dhënë me anëtarin e përgjithshëm $a_n = 2^n$, vlera kufitare është $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = +\infty$, vargu **divergjon** kah $+\infty$.

Për vargun të dhënë me anëtarin e përgjithshëm $a_n = -2n$, vlera kufitare është $\lim_{n \rightarrow \infty} (-2n) = -\infty$, vargu **divergjon** kah $-\infty$.

Për vargun e dhënë me anëtarin e përgjithshëm $a_n = (-1)^n$, vlera kufitare $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ nuk ekziston, vlerat e vargut **osillojnë përfundimisht** në -1 ose 1 .

Për vargun me anëtarin e përgjithshëm $a_n = (-1)^n n$, vlera kufitare $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n n$ nuk ekziston, vlerat e vargut **osillojnë në pakufi** dhe tentojnë në $-\infty$ ose $+\infty$.

Shembulli 2. Të vërtetohet sipas përkufizimit se vlera kufitare e vargut $\left(\frac{1}{n}\right)$ është 0 , d.m.th., $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ për $\varepsilon = \frac{1}{10}$ të caktohet numri i anëtarëve të cilët janë jashtë rrethinës $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Zgjidhje: Është dhënë vargu me anëtarin e përgjithshëm $a_n = \frac{1}{n}$ dhe duhet të vërtetohet se vlera kufitare e vargut është $a = 0$.

Le të jetë $\varepsilon > 0$ mjaft i vogël, çfarëdo numër real i zgjedhur. Atëherë prej $|a_n - a| < \varepsilon$ fitohet

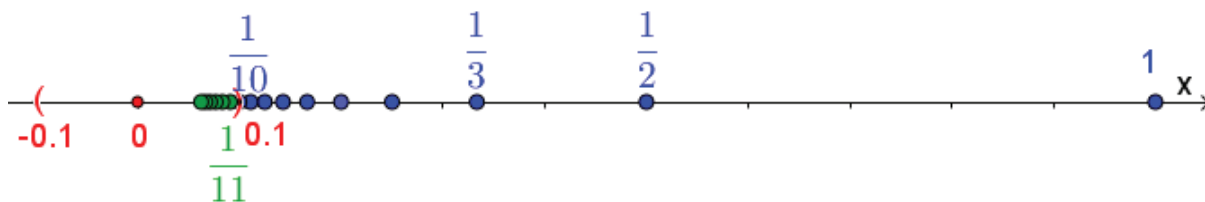
$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon \text{ d.m.th., } \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Vijon se $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Nëse është $\frac{1}{\varepsilon}$ numër natyror atëherë $n_0 = \frac{1}{\varepsilon}$, ose nëse $\frac{1}{\varepsilon}$ është numër real pozitiv atëherë (pjesë e plotë prej numri real pozitiv).

$$\text{Për } \varepsilon = \frac{1}{10}, \text{ kemi } n_0 = \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\frac{1}{10}} = 10.$$

Anëtarët me indeks më të vegjël ose të barabartë me $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ janë jashtë intervalit $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, ndërsa anëtarët me indeks më të mëdhenj se $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots$ janë në intervalin $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ d.m.th., anëtarët e vargut $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{10}$ (numër të fundshëm të anëtarëve të vargut) janë jashtë intervalit $\left(0 - \frac{1}{10}, 0 + \frac{1}{10}\right) = (-0.1; 0.1)$, ndërsa anëtarët $\frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \dots$ (anëtar të pa fundshëm të vargut) janë në intervalin $(-0.1; 0.1)$.



Shembulli 3. Të vërtetohet sipas përkufizimit se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$ dhe $\varepsilon = \frac{1}{100}$ të caktohet numri i anëtarëve të cilët janë jashtë rrethinës $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Zgjidhje: Duhet të vërtetohet se vargu $a_n = \frac{n}{2n+1}$ ka kufi $a = \frac{1}{2}$.

Le të jetë $\varepsilon > 0$ mjaft i vogël, numër real i zgjedhur çfarëdo. Prej $|a_n - a| < \varepsilon$ kemi

$$\left| \frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon,$$

$$\left| \frac{2n - 2n - 1}{2(2n+1)} \right| < \varepsilon,$$

$$\left| \frac{-1}{4n+2} \right| < \varepsilon,$$

$$\text{d.m.th.m., } \frac{1}{4n+2} < \varepsilon$$

$$\text{Fitohet se } 4n+2 > \frac{1}{\varepsilon} \text{ d.m.th., } n > \frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon} = n_0(\varepsilon)$$

$$\text{Nëse } \varepsilon = \frac{1}{100}, \text{ atëherë } n_0 = \frac{1 - 2 \cdot \frac{1}{100}}{\frac{1}{100}} = \frac{1 - \frac{1}{50}}{\frac{1}{25}} = \frac{\frac{49}{50}}{\frac{1}{25}} = \frac{49}{2} \text{ d.m.th., } n_0 = \left\lceil \frac{49}{2} \right\rceil = 24. \text{ Njëzet e katër}$$

anëtar të vargut gjenden jashtë intervalit $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{100}; \frac{1}{2} + \frac{1}{100}\right) = (0,49; 0,51)$, ndërsa anëtarët me indeks 25 dhe më të vegjël se 25 janë në intervalin $(0,49; 0,51)$.

Shembulli 4. Është dhënë vargu $a_n = \frac{n}{4n+1}$. Të tregohet se vlera kufitare e tij është $\frac{1}{4}$. Për cilat vlera të n është e kënaqur pabarazia $\left|a_n - \frac{1}{4}\right| < 0,01$?

Zgjidhje: Për të treguar se vlera kufitare e vargut është dhënë me anëtarin e tij të përgjithshëm

$a_n = \frac{n}{4n+1}$ ka vlerë kufitare $\frac{1}{4}$, duhet të vërtetojmë se $\left|a_n - \frac{1}{4}\right| < \varepsilon$, ku $\varepsilon > 0$. Kemi:

$$\left|a_n - \frac{1}{4}\right| = \left|\frac{n}{4n+1} - \frac{1}{4}\right| = \left|\frac{4n - 4n - 1}{4(4n+1)}\right| = \frac{1}{4(4n+1)}$$

$$\text{Prej } \left|a_n - \frac{1}{4}\right| < \varepsilon \text{ vijon } \frac{1}{4(4n+1)} < \varepsilon.$$

$$\frac{1}{4(4n+1)} < \varepsilon \Leftrightarrow 1 < 4\varepsilon(4n+1) \Leftrightarrow 1 < 16n\varepsilon + 4\varepsilon \Leftrightarrow 16n\varepsilon > 1 - 4\varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1 - 4\varepsilon}{16\varepsilon}.$$

Me zëvendësimin për $\varepsilon = 0,01$ te pabarazia e fundit kemi:

$$n > \frac{1 - 4 \cdot 0,01}{16 \cdot 0,01} = \frac{1 - 0,04}{0,16} = \frac{0,96}{0,16} = 6, \text{ d.m.th., } n_0 = 6$$

Pabarazia e dhënë është e kënaqur duke filluar prej anëtarit të shtatë të vargut.

Shembulli 5. Të caktohet vlera kufitare e vargut me anëtarin e përgjithshëm $a_n = 2^{\frac{1}{n}}$.

Zgjidhje: Të shkruajmë disa anëtarë të vargut me anëtarin e përgjithshëm $a_n = 2^{\frac{1}{n}}$

$$\begin{array}{ll}
 n=1: & 2^1 = 2 \\
 n=2: & 2^{\frac{1}{2}} = 1,41 \\
 n=3: & 2^{\frac{1}{3}} = 1,26 \\
 \vdots & \\
 n=10: & 2^{\frac{1}{10}} = 1,07 \\
 \vdots & \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 & \text{u} \quad 2^{\frac{1}{n}} > 1, \forall n \in N
 \end{array}$$

Prej përkufizimit për vlerën kufitare të vargut vijon:

$$\left| 2^{\frac{1}{n}} - 1 \right| < \varepsilon \qquad \frac{1}{n} \log 2 < \log(1 + \varepsilon)$$

$$2^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon / \log \qquad n > \frac{\log 2}{\log(1 + \varepsilon)}$$

Domethënë për çdo $\varepsilon > 0$, ekziston numër natyror $n_0 = \frac{\log 2}{\log(1 + \varepsilon)}$ (i cili është pjesë e plotë prej n_0), ashtu që për $n > n_0$, $|a_n - 1| < \varepsilon$ dhe $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{n}} = 1$

Vërejtje: $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1, \forall a > 0$.

Teorema: Nëse vargu (a_n) është konvergjent, atëherë vlera e tij kufitare është **e vetme**.

Teoremën do ta zbatojmë pa vërtetim.

Detyra për ushtrime:

1. Është dhënë vargu $a_n = \frac{2n}{4n+1}$. Të tregohet se vlera e tij kufitare është $\frac{1}{2}$. Duke filluar prej n , është i kënaqur relacioni $\left| a_n - \frac{1}{2} \right| < 0,0001$?
2. Është dhënë vargu $a_n = \frac{2n^2}{n^2-5}$. Të tregohet se vlera e tij kufitare është 2. Duke filluar prej n , është i kënaqur relacioni $|a_n - 2| < 0,1$?
3. Të vërtetohet sipas përkufizimit vlera kufitare $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$ edhe për $\varepsilon = \frac{1}{100}$ të caktohet numri i anëtarëve të cilët janë jashtë rrethinës $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

4. Të vërtetohet sipas përkufizimit vlera kufitare $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n+1} = 2$ edhe për $\varepsilon = \frac{1}{10}$ të caktohet numri i anëtarëve të cilët janë jashtë rrethinës $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.
5. Duke e shfrytëzuar përkufizimin për vlerën kufitare të vargut vërteto se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n^2 - 1} = \frac{1}{2}$. Duke filluar prej n , është i kënaqur relacioni $|a_n - a| < 0,01$?
6. Duke e shfrytëzuar përkufizimin për vlerën kufitare të vargut barazimin $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 2}{n^2 + 1} = 3$.
7. Duke e shfrytëzuar përkufizimin për vlerën kufitare të vargut barazimin $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + 3}{1 - 2n^2} = -\frac{5}{2}$. Duke filluar prej n , është i kënaqur relacioni $|a_n - a| < 0,01$?
8. Duke e shfrytëzuar përkufizimin për vlerën kufitare të vargut barazimin $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 3n + 4}{2n^2 + 3} = \frac{1}{2}$. Duke filluar prej n , është i kënaqur relacioni $|a_n - a| < 0,01$?
9. Duke e shfrytëzuar përkufizimin për vlerën kufitare të vargut vërteto se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{5n+2} = \frac{3}{5}$. Cakto n ashtu që të jetë i kënaqur pabarazimi $\left|a_n - \frac{3}{5}\right| < 0,001$.
10. Duke e shfrytëzuar përkufizimin për vlerën kufitare të vargut vërteto se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-3n}{2n} = -\frac{3}{2}$. Cakto n ashtu që të jetë i kënaqur pabarazimi $\left|a_n + \frac{3}{2}\right| < 0,1$.
11. Është dhënë vargu me anëtarin e përgjithshëm $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$
- Shkruaj gjashtë anëtarët e parë të vargut,
 - Paraqiti anëtarët te boshti numerik,
 - Kontrollo se vargu a është monoton,
 - Kontrollo se vargu a është i kufizuar,
 - Vërteto sipas përkufizimit se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$,
 - Për cilën vlerë të n vlen $|a_n - 1| < 0,001$.

7. OPERACIONET ME VARGJE KONVERGJENTE

Te pjesa vijuese do të konstruktohen vargje anëtarët e të cilëve fitohen prej anëtarëve të vargjeve konvergjente dhe do të jenë dhënë rregulla për caktimin e vlerave të tyre kufitare, duke ditur vlerat kufitare të vargjeve konvergjente.

Teorema: Vargjet (a_n) dhe (b_n) janë konvergjente $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ dhe $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Atëherë edhe vargjet $(a_n + b_n)$, $(a_n - b_n)$, $(a_n \cdot b_n)$, $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ janë vargje konvergjente dhe vlen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \pm b$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n\right) = a \cdot b$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (k \cdot a_n) = k \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = k \cdot a, \quad k \in \mathbb{R}$$

Vërtetim:

Do të vërtetojmë vetëm një pjesë të teoremës, d.m.th., $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a + b$

Le të jetë $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ dhe $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ dhe le të jetë $\varepsilon > 0$.

Për $n_1 \in \mathbb{N}$, të gjithë anëtarët e vargut (a_n) gjenden në rrethinën ε të a .

Për $n_2 \in \mathbb{N}$, të gjithë anëtarët (b_n) gjenden në rrethinë ε të b .

Le të jetë $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Atëherë për $n \geq n_0$ vlen $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ dhe $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Prej pabarazimit të trekëndëshit kemi:

$$|a_n + b_n - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Vijon: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$.

Me shfrytëzimin e teoremës dhe vlera kufitare e vargut $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, mund të njehsohet vlera kufitare e vargjeve, pa vërtetuar.

Shembulli 1. Njehso vlerën kufitare të vargut me ndihmën e anëtarit të përgjithshëm $a_n = 2 + \frac{1}{n}$.

Zgjidhje: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 2 + 0 = 2$

Shembulli 2. Të njehsohet vlera kufitare $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n}{3n^2 + 4}$.

Zgjidhje: Do të pjesëtojmë te numëruesi dhe emëruesi me fuqinë me n më të lartë (ose të nxjerrim fuqinë me n më të lartë para kllapës), ndërsa pastaj do ta zbatojmë teoremën.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n}{3n^2 + 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2 + n}{n^2}}{\frac{3n^2 + 4}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{3 + \frac{4}{n^2}} = \frac{1 + 0}{3 + 0} = \frac{1}{3}.$$

Shembulli 3. Të njehsohet vlera kufitare $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n - 1}{2n^2 + 3n}$.

Zgjidhje: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n - 1}{2n^2 + 3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4n - 1}{n^2}}{\frac{2n^2 + 3n}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{n} - \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{3}{n}} = \frac{0}{2 + 0} = \frac{0}{2} = 0.$

Shembulli 4. Të njehsohet vlera kufitare e vargut me anëtarin e përgjithshëm $a_n = \frac{3n^3 + 2n^2 + 5}{2n^3 - n + 1}$

Zgjidhje:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + 2n^2 + 5}{2n^3 - n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(\frac{3n^3}{n^3} + \frac{2n^2}{n^3} + \frac{5}{n^3} \right)}{n^3 \left(\frac{2n^3}{n^3} - \frac{n}{n^3} + \frac{1}{n^3} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{n} + \frac{5}{n^3}}{2 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}} = \frac{3}{2}$$

Vlera kufitare e vargut gjeometrik (p^n) varësisht prej vlerës së p është:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p^n = \begin{cases} , & p \leq -1 \\ 0, & -1 < p < 1 \\ 1, & p = 1 \\ +\infty, & p > 1 \end{cases}$$

Shembulli 5. Me zbatimin e vlerës kufitare të vargut gjeometrik (p^n) të caktohet vlera kufitare me anëtarin e përgjithshëm $a_n = \frac{5^{n+1} + 7^{n+2}}{5^n + 7^{n+1}}$,

Zgjidhje:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} + 7^{n+2}}{5^n + 7^{n+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot 5^n + 49 \cdot 7^n}{5^n + 7 \cdot 7^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5 \cdot 5^n + 49 \cdot 7^n}{7^n}}{\frac{5^n + 7 \cdot 7^n}{7^n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^n + 49 \cdot 1^n}{\left(\frac{5}{7}\right)^n + 7 \cdot 1^n} = \frac{5 \cdot 0 + 49 \cdot 1}{0 + 7 \cdot 1} = \frac{49}{7} = 7\end{aligned}$$

Shembulli 6. Njehso vlerën kufitare të vargut me anëtarin e përgjithshëm:

a) $a_n = \frac{1}{4^n}$

b) $a_n = \frac{1 - 2^n}{3 + 2^{n+1}}$

Zgjidhje:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$

$$\begin{aligned}\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 2^n}{3 + 2^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 2^n}{3 + 2^n \cdot 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1 - 2^n}{2^n}}{\frac{3 + 2^n \cdot 2}{2^n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1 \cdot 2} = \frac{0 - 1}{0 + 2} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Shembulli 7. Të njehsohen këto vlera kufitare të vargjeve:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + n^2 - 7n + 5}{3n^3 + 2n^2 - 5n + 8} \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n+1} - \frac{3n+1}{4n-3} \right) \quad \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n})$$

Zgjidhje:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + n^2 - 7n + 5}{3n^3 + 2n^2 - 5n + 8} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(\frac{2n^3}{n^3} + \frac{n^2}{n^3} - \frac{7n}{n^3} + \frac{5}{n^3} \right)}{n^3 \left(\frac{3n^3}{n^3} + \frac{2n^2}{n^3} - \frac{5n}{n^3} + \frac{8}{n^3} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n} - \frac{7}{n^2} + \frac{5}{n^3}}{3 + \frac{2}{n} - \frac{5}{n^2} + \frac{8}{n^3}} = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n+1} - \frac{3n+1}{4n-3} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n(4n-3) - (3n+1)(n+1)}{(n+1)(4n-3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^2 - 6n - 3n^2 - 4n - 1}{(n+1)(4n-3)} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 - 10n - 1}{4n^2 + n - 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(\frac{5n^2}{n^2} - \frac{10n}{n^2} - \frac{1}{n^2} \right)}{n^2 \left(\frac{4n^2}{n^2} + \frac{n}{n^2} - \frac{3}{n^2} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - \frac{10}{n} - \frac{1}{n^2}}{4 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2}} = \frac{5}{4} \\
\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n} \right) \cdot \frac{\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n}}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n}} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n})(\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n})}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{2n+3})^2 - (\sqrt{2n})^2}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n}} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3-2n}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n}} = 0
\end{aligned}$$

Shembulli 8. Njehso vlerën kufitare të vargut me anëtarin e përgjithshëm:

$$\text{a) } a_n = \frac{n+3}{\sqrt{n^2-7}}, \text{ b) } a_n = \frac{(n+1)^2 - (n+2)^2}{(n-1)^2 - (n-2)^2}, \text{ c) } a_n = \frac{(n+1)! + n!}{(n+1)! - n!}$$

Zgjidhje:

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! + n!}{(n+1)! - n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot n! + n!}{(n+1) \cdot n! - n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! (n+1+1)}{n! (n+1-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n} = 1$$

Gjatë konstatimit të konvergjencës së vargjeve, shpesh herë shfrytëzohet edhe mënyra e vendosjes së anëtarëve të një vargu ndërmjet anëtarëve të dy vargjeve konvergjente të cilët kanë vlerë kufitare të njëjtë. Kjo mënyrë është dhënë me këtë teoremë.

Teorema: (Sandviç teorema): Le të jenë (y_n) dhe (z_n) vargje për të cilat $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = c \in \mathbb{R}$. Nëse për çdo n vlen $y_n \leq x_n \leq z_n$ atëherë edhe për vargun (x_n) ka vlerë kufitare dhe poashtu $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$.

Shembulli 9: Të njehsohet vlera kufitare e vargut me anëtarin e përgjithshëm $x_n = \sqrt[n]{5^n + 7^n}$.

Zgjidhje:

Le të jetë $7^n \leq 5^n + 7^n \leq 7^n + 7^n$ d.m.th., $7^n \leq 5^n + 7^n \leq 2 \cdot 7^n$ vijon $7 \leq \sqrt[n]{5^n + 7^n} \leq \sqrt[n]{2} \cdot 7$

Pasi $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{n}} = 1$, kemi $\lim_{n \rightarrow \infty} 7 = 7$ dhe $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2^{\frac{1}{n}} \cdot 7 \right) = 1 \cdot 7 = 7$, ndërsa vijon se $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5^n + 7^n} = 7$.

Shembulli 10: Shkruaj disa anëtarë të vargut me anëtarin e përgjithshëm $y_n = 1 - \frac{1}{n}$, ndërsa cakto sa është vlera kufitare.

Zgjidhje: Le të jetë $y_n = 1 - \frac{1}{n}$, atëherë

$$y_1 = 1 - \frac{1}{1} = 0, y_2 = 1 - \frac{1}{2} = 0,5, \dots, y_{10} = 1 - \frac{1}{10} = 0,9, \dots, y_{100} = 1 - \frac{1}{100} = 0,99,$$

kur, $n \rightarrow \infty$, $y_n \rightarrow 1$ ku përfundojmë se $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = 1$

Shembulli 11. Shkruaj disa anëtarë të vargut me anëtarin e përgjithshëm $z_n = 1 + \frac{1}{n}$, ndërsa cakto sa është vlera kufitare.

Zgjidhje: Le të jetë $z_n = 1 + \frac{1}{n}$, atëherë

$$z_1 = 1 + \frac{1}{1} = 2, z_2 = 1 + \frac{1}{2} = 1,5, \dots, z_{10} = 1 + \frac{1}{10} = 1,1, \dots, z_{100} = 1 + \frac{1}{100} = 1,01,$$

kur, $n \rightarrow \infty$, $z_n \rightarrow 1$ ku përfundojmë se $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 1$

Në vazhdim do të vërejmë një vlerë kufitare karakteristike e vargut.

Shembulli 12. Njehso vlerën kufitare të vargut me anëtarin e përgjithshëm: $x_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$

Zgjidhje: Le të jetë $x_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$ atëherë

$$x_1 = \left(1 + \frac{1}{1} \right)^1 = 2, x_2 = \left(1 + \frac{1}{2} \right)^2 = 2,25, \dots, x_{10} = \left(1 + \frac{1}{10} \right)^{10} = 2,59374246, \dots,$$

$$x_{100} = \left(1 + \frac{1}{100} \right)^{100} = 2,70475832, \dots, x_{1\,000\,000} = \left(1 + \frac{1}{1\,000\,000} \right)^{1\,000\,000} = 2,71828314...$$

Sipas intuitës mund të përfundohet se $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$. Këtë vlerë kufitare do ta shfrytëzojmë pa vërtetim.

Vërejtje:

Numri e quhet edhe numri i Neperit dhe shërben si bazë e logaritmeve natyrore.

Numri e është numër iracional dhe vlera e tij e përafërt është numër iracional dhe vlera e përafërt e tij është, $e \approx 2.72$

29 shifrat e para të numrit e janë:

$$e \approx 2,718281828459045235360287471352$$

Shembulli 13. Cakto vlerat kufitare me zbatimin e numrit $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}$;

Zgjidhje: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} = e$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4n+1}\right)^{2n-2}$

Zgjidhje: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4n+1}\right)^{2n-2} = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4n+1}\right)^{4n+1} \right]^{\frac{2n-2}{4n+1}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-2}{4n+1}} = e^{\frac{1}{2}}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n-3}\right)^n$

Zgjidhje: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n-3}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n+2}{n-3} - 1\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n+2-n+3}{n-3}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{n-3}\right)^n =$

$$= \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n-3}{5}}\right)^{\frac{n-3}{5}} \right]^{\frac{5n}{n-3}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{n-3}} = e^5$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+2} \right)^n$$

Zgjidhje:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+2} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+2} \right)^{n+2-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+2} \right)^{n+2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+2} \right)^{-2} = e \cdot 1^{-2} = e$$

$$e) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{n} \right)^n$$

$$\text{Zgjidhje: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{4}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{4}} \right)^{n \cdot \frac{4}{4}} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{4}} \right)^{\frac{n}{4}} \right)^4 = e^4$$

$$f) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n+1}{4n+3} \right)^n$$

$$\text{Zgjidhje: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n+1}{4n+3} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n+3-2}{4n+3} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n+3}{4n+3} - \frac{2}{4n+3} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{4n+3} \right)^n =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{4n+3}{-2}} \right)^{\frac{4n+3}{-2} \cdot \frac{-2n}{4n+3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{4n+3}{-2}} \right)^{\frac{4n+3}{-2}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{-2n}{4n+3}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n}{4n+3}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{\sqrt{e}}{e}$$

Detyra për ushtrime:

Të njehsohet vlera kufitare e vargut të dhënë me anëtarin e përgjithshëm

$$1. a_n = \frac{4n-1}{2n+3},$$

$$2. a_n = \frac{7-5n}{10n}$$

$$3. a_n = \frac{n^2+2n-3}{n^2-n+4}$$

4. $a_n = \frac{n^5 - 4}{n + 3n^5}$

5. $a_n = \frac{3n - 2}{n^2 - 4n}$

6. $a_n = \frac{5n^2 - 3n}{2 - 3n^3}$

7. $a_n = \frac{(2n - 3)(4n + 1)}{5n - 4}$

8. $a_n = \frac{\sqrt[3]{n^3 + 2n}}{3n - 4}$

9. $a_n = \frac{3^n + 5^{n+1}}{5^n - 3^{n+2}}$

Të njehsohet vlera kufitare:

10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^4 + 3n^2 + 1}{2n^3 - n^2 + 2}$

11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$

12. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^n}{2^{n+1} + 3^{n+1}}$

13. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

14. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n-1}$

15. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-3n+2}$

16. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+5)! + (n+3)!}{(n+5)! - (n+3)!}$

17. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - n + 3} - \sqrt{n^2 + 5n - 6})$

18. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{2n-1} \right)^n$

8. SHUMA E ANËTARËVE TË PROGRESIONIT GJEOMETRIKT TË PAFUNDSHËM

Ta shqyrtojmë progresionin gjeometrik të pafundshëm $a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, \dots, a_1q^{n-1}, \dots$ ku $a = 1$ është anëtar i parë, ndërsa q është herësi i progresionit gjeometrik.

Formojmë varg:

$$S_1 = a_1,$$

$$S_2 = a_1 + a_1q,$$

$$S_3 = a_1 + a_1q + a_1q^2,$$

...

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1},$$

...

Të supozojmë se vargu (S_n) është konvergjent, d.m.th. $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, ku S është numër real i fundshëm.

Përkufizimi. Vlera kufitare S e vargut (S_n) quhet shuma e progresionit gjeometrik të afundshëm $a_1, a_1q, a_1q^2, \dots$

$$\text{Nëse } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S, \text{ atëherë } a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1} + \dots = S.$$

Do t'i shqyrtojmë disa raste varësisht prej vlerës së herësit q , d.m.th., $|q| = 1$, $|q| < 1$ dhe $|q| > 1$, dhe $S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1}$

1. Le të jetë $|q| = 1$ d.m.th., $q = 1$ ose $q = -1$

1.1 Nëse $q = 1$, atëherë $S_n = a_1 + a_1 \cdot 1 + a_1 \cdot 1^2 + \dots + a_1 \cdot 1^{n-1} = a_1 \cdot n$ dhe $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$

1.2. Nëse $q = -1$, atëherë

$S_n = a_1 + a_1 \cdot (-1) + a_1 \cdot (-1)^2 + \dots + a_1 \cdot (-1)^{n-1} = a_1 - a_1 + a_1 - a_1 + \dots + a_1 \cdot (-1)^{n-1}$ dhe varësisht prej vlerës së n shumat do të jenë $a = 1$ ose 0 , ndërsa vargu (S_n) ka dy pika të grumbullimit d.m.th. vlera kufitare $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ nuk ekziston.

2. Le të jetë $|q| < 1$, atëherë shuma e n -anëtarëve të parë të progresionit gjeometrik të pafundshëm është

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \frac{q^n}{q - 1} + a_1 \frac{-1}{q - 1} \text{ d.m.th. } S_n = a_1 \frac{q^n}{q - 1} + a_1 \frac{1}{1 - q}$$

$$\text{Prej } \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0, \text{ kur } |q| < 1 \text{ kemi } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_1 \frac{q^n}{q - 1} + a_1 \frac{1}{1 - q} \right) = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Vijon, vargu (S_n) është konvergjent pra shuma e anëtarëve të progresionit gjeometrik të pafundshëm vargu shkruhet shkurtimisht sikurse

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1} + \dots = \frac{a_1}{1 - q} \text{ për } |q| < 1.$$

3. Le të jetë $|q| > 1$, atëherë $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$, edhe vargu (S_n) është divergjent.

Kemi, për $|q| > 1$ shuma e progresionit gjeometrik të pafundshëm nuk ekziston.

Shembulli 1. Ta caktojmë shumën e progresionit gjeometrik $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^{n-1}}, \dots$

Zgjidhje: Pasi $a_1 = 1$, $q = \frac{1}{2}$, d.m.th., $|q| < 1$ atëherë shuma e progresionit është

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Shembulli 2. Ta caktojmë shumën $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots$

Zgjidhje: Nëse e shqyrtojmë shumën si anëtar të progresionit gjeometrik të pafundshëm, atëherë $a_1 = \frac{1}{2}$ dhe $q = -\frac{1}{2}$ d.m.th. $|q| < 1$ atëherë edhe shumën do ta njehsojmë

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

Shembulli 3. Ta paraqesim numrin dhjetor periodik $0,777\dots$ si shumë të anëtarëve prej progresionit gjeometrik të pafundshëm, ndërsa pastaj të njehsohet ajo shumë.

Zgjidhje: Pasi,

$$0,777... = 0,7 + 0,07 + 0,007 + ... = \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + ... =$$

$$= 7 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + ... \right) = 7 \cdot \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 7 \cdot \frac{\frac{1}{10}}{\frac{9}{10}} = 7 \cdot \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$$

Shembulli 4. Ta paraqesim si thyesë të pathjeshtueshme numrin 21,3(54).

Zgjidhje: Pasi,

$$21,3(54) = 21,3545454... = 21 + 0,3 + 0,054 + 0,00054 + ... =$$

$$= 21 + \frac{3}{10} + \frac{54}{10^3} + \frac{54}{10^5} + \frac{54}{10^7} + ... = 21 + \frac{3}{10} + \frac{\frac{54}{10^3}}{1 - \frac{1}{10^2}} =$$

$$= 21 + \frac{3}{10} + \frac{\frac{54}{1000}}{1 - \frac{1}{100}} = 21 + \frac{3}{10} + \frac{\frac{54}{1000}}{\frac{99}{100}} = 21 + \frac{3}{10} + \frac{6}{11 \cdot 10} =$$

$$= \frac{21 \cdot 110 + 3 \cdot 11 + 6}{11 \cdot 10} = \frac{2349}{110}$$

Shembulli 5. Ta vërtetojmë barazimin $2 + \frac{8}{5} + \frac{32}{25} + \frac{128}{125} + ... = 15 - \frac{15}{2} + \frac{15}{4} - \frac{15}{8} + ...$

Zgjidhje: Së pari, duhet ta njehsojmë shumën e dy progresioneve të pafundshme në veçanti.

$$\text{Në anën e majtë kemi shumë të progresionit gjeometrik të pafundshëm me } a_1 = 2, q = \frac{4}{5} \text{ dhe}$$

$$2 + \frac{8}{5} + \frac{32}{25} + \frac{128}{125} + ... = \frac{2}{1 - \frac{4}{5}} = \frac{2}{\frac{1}{5}} = 10$$

Në anën e djathtë kemi shumë të progresionit gjeometrik të pafundshëm me $a_1 = 15$,

$$q = -\frac{1}{2} \text{ dhe } 15 - \frac{15}{2} + \frac{15}{4} - \frac{15}{8} + \dots = \frac{15}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{15}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{15}{\frac{3}{2}} = 10$$

Fitohet se shuma e të dy progresioneve gjeometrike të pafundshme është e barabartë, me të cilën është vërtetuar barazia.

Shembulli 6. Shua e progresionit gjeometrik të pafundshëm është 4, ndërsa anëtar i dytë është $a_2 = \frac{3}{4}$. Cakto progresionin gjeometrik.

Zgjidhje: Prej kushtit të detyrës $S = 4$ d.m.th. $\frac{a_1}{1-q} = 4$ dhe $a_2 = \frac{3}{4}$ d.m.th., $a_1 q = \frac{3}{4}$.

$$\text{Fitohet sistem barazimesh: } \begin{cases} \frac{a_1}{1-q} = 4 \\ a_1 q = \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 4 - 4q \\ 4a_1 q = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 4 - 4q \\ 4(4 - 4q)q = 3 \end{cases}$$

Prej barazimit të dytë kemi $16q - 16q^2 = 3$ d.m.th., $16q^2 - 16q + 3 = 0$.

Fitojmë dy zgjidhje për herësin $q' = \frac{1}{4}$ dhe $q'' = \frac{3}{4}$.

Me zëvendësimin te barazimi i parë $a_1 = 4 - 4q$ kemi:

- për zgjidhjen e parë $a_1' = 4 - 4 \cdot \frac{1}{4} = 3$ d.m.th., progresioni gjeometrik është

$$3 + \frac{3}{4} + \frac{3}{16} + \dots,$$

- për zgjidhjen e dytë $a_1'' = 4 - 4 \cdot \frac{3}{4} = 1$ d.m.th., progresioni gjeometrik është $1 + \frac{3}{4} + \frac{9}{16} + \dots$

Shembulli 7. Te trekëndëshi barabrinjës me brinjë a është brendashkruar trekëndësh barabrinjës kulmet e të cilit janë meset e brinjëve të trekëndëshit të parë, tek i dyti në mënyrë të ngjashme është brendashkruar i tretë etj. Njehso shumat e perimetrave të gjithë trekëndëshave.

Zgjidhje: Duke shfrytëzuar vetitë e rrënjëve kemi:

$$\begin{aligned}\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\ldots}}}} &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\ldots}}}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt{\sqrt{2\sqrt{2\ldots}}} = \\ &= \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdot \sqrt[16]{2} \ldots = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{8}} \cdot 2^{\frac{1}{16}} \ldots = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots} = 2^{1 - \frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} = 2^1 = 2\end{aligned}$$

Detyra për ushtrime:

1. Njehso shumën $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \ldots$
2. Njehso shumën $5 + \frac{5}{4} + \frac{5}{16} + \ldots$
3. Njehso shumën $4 + 7 + \frac{8}{3} + \frac{35}{8} + \frac{16}{9} + \frac{175}{64} + \ldots$
4. Për progresionin gjeometrik të pafundshëm është dhënë $S = 10$ dhe $a_1 = 6$. Cakto herësin q .
5. Për progresionin gjeometrik të pafundshëm është dhënë $S = 25$ dhe $q = \frac{4}{5}$. Cakto anëtarin e parë a_1 .
6. Te trekëndëshi barabrinjës me brinjë 2 është brendashkruar trekëndësh barabrinjës kulmet e të cilit janë meset e brinjëve të trekëndëshit, tek i dyti në mënyrë të ngjashme është brendashkruar trekëndësh i tretë etj. Njehso:
 - a) shumën e syprinave të gjithë trekëndëshave,
 - b) shumën e perimetrave të gjithë trekëndëshave.
7. Njehso vlerën e shprehjes $\sqrt[3]{5\sqrt[3]{5\sqrt[3]{5\ldots}}}$
8. Njehso vlerën e shprehjes $3\sqrt{7\sqrt{3\sqrt{7\sqrt{3\sqrt{7\ldots}}}}}$
9. Numrin 3, 252525... paraqite si shumë të anëtarëve të progresionit gjeometrik të pafundshëm, ndërsa pastaj njehso shumën.
10. Me shfrytëzimin e shumës së progresionit gjeometrik të pafundshëm paraqite si thyesë të pathjeshtueshme $4,35(6)$
11. Me shfrytëzimin e shumës së progresionit gjeometrik të pafundshëm paraqite si thyesë të pathjeshtueshme

DETYRA PËR PËRSËRTJE DHE ZBATIM PRAKTIK:

1. Të caktohet monotonia dhe kufizimi i vargut të dhënë me anëtarin e përgjithshëm

$$a_n = \frac{2n}{n+1}$$

2. Të caktohet monotonia dhe kufizimi i vargut të dhënë me anëtarin e përgjithshëm

$$a_n = \frac{n^2}{n^2 - 2}$$

3. Ndërmjet numrave 2 dhe 26 fut pesë numra, të cilët së bashku me numrat e dhënë të formojnë progresion aritmetik.

4. Anëtari i parë i një progresioni gjeometrik është 1, herësi është 2. Një anëtar i tij është 512. Cili anëtar sipas radhës është ai?

5. Gjeje progresionin gjeometrik nëse $a_5 - a_3 = 36$ dhe $a_2 - a_4 = -18$.

6. Në qytet ekzistojnë dy kompani me model të ndryshëm tarifor të pagesës:

A: 100 denarë starti,

B: 0 denarë starti,

50 denarë për kilometër

60 denarë për kilometër

Cili taksi transportues do ta zgjedh Markon nëse vend ii punës ka 7 kilometra.

Udhëzim: Shkruani vargje prej numrave varësisht prek kilometrave të kaluar (nga 10 anëtar)

Si progresioni paraqet vargu?

7. Dëshironi të depononi 2000 euro në bankë.

Në bankën e parë u është ofruar çdo muaj të marrëni kamatë prej 3%.

Në bankën e dytë u është ofruar kamatë prej 2%, ndërsa çdo muaj zmadhohet pjesa kryesore zmadhohet për sasinë e kamatës.

Sa para do të keni në llogari në fund të vitit të para pas të dy modeleve?

Sa para do të keni në llogari në fund të vitit të pestë sipas të dy modeleve?

Në cilën bankë t'i depononi paratë? Vallë zgjedhja do të varet prej numrit të viteve.

8. Gjatë kohës së pushimit veror Igori dëshiron të punoj 14 ditë në piceri. Pronari i picerisë i ka dhënë dy mënyra të përfitimit

A: 100 denarë – dita 1

B: 1 denarë – dita 1

200 denarë – dita 2

2 denarë – dita 2

300 denarë – dita 3

4 denarë – dita 3

400 denarë – dita 4

8 denarë – dita 4

...

...

- a) Cilin model ta zgjedh Igori?

b) Njehso sa do të përfitojë Igori sipas të dy modeleve në veçanti?

9. Shuma prej 50 000 denarë është ndarë në 10 persona ashtu që çdo pasardhës fiton 1000 denarë më pak se paraardhësi.

Sa denarë ka marrë personi i parë, ndërsa sa personi i fundit?

10. Në ndonjë kulturë paraprakisht ka pasur 30 baktere dhe numri i tyre është dyfishuar çdo orë. Sa baktere do të jenë të pranishme te kultura pas orës së dytë, të katër dhe të dhjetë?

11. Tadej ka 2 prindër, 4 gjyshe dhe gjyshër, 8 stërgjyshe dhe stërgjysh etj. Sa paraardhës ka Tadej gjatë pesë gjeneratave para gjeneratës së tij?

Sa gjenerata të paraardhësit tuaja dini ju? Te tabela shkruani emrat e tyre.

12. Prej shtyllës së lartë 24 merta bie topi dhe gjatë çdo hedhje arrin $\frac{3}{4}$ prej largesës së rënë. Sa rrugë kalon topi para përfundimisht të ndal në tokë?

13. Çmimi fillestar i krypto valutës fsë re është 5 dollar. Sa është çmimi i krypto valutës pas 16 ditë, nëse ajo zmadhohet çdo ditë nga 2 dollar?

14. Rok bendi i njohur ka botuar album të rid he në një ditë janë shitur 100 000 ekzemplarë. Albumi është në majë të top listave dhe çdo ditë janë shitur 20 000 ekzemplar më shumë se dita paraprake. Sa ekzemplar prej albumit janë shitur për një javë?

15. Popullata e kafshëve të egra në Parkun nacional Galiçica, çdo vit zmadhohet për 2%. Sa do të jetë popullata e kafshëve të egra në vitin 2022, nëse në vitin 2015 popullata është 1000?

16. Një mur ka 60 tjegulla në rreshtin e parë, ndërsa çdo rresht pasardhës ka 3 tjegulla më pak se rreshti paraprak. Sa tjegulla ka në rreshtin e dhjetë?

17. Avdiu ka bërë piramidë prej kubeve duke shfrytëzuar skemën e dhënë, ndërsa dëshiron te baza të ketë 12 kube.

Sa kube i duhen Avdiut për ta bërë piramidën?

Sa rreshta do të ketë piramida?



18. Brinjët e një trekëndëshi janë anëtarët e një progresioni gjeometrik. Gjeji brinjët e trekëndëshit nëse perimetri i tij është 19, ndërsa shuma e katrorëve të brinjëve është 133.

19. Njehso: a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 5^{n+1}}{5^n - 2^{n+2}}$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n}{n^2 + 3n} - \frac{1}{n^2} \right)$

20. Paraqite numrin dhjetor periodik 0,124124124... si shumë të anëtarëve prej progresionit gjeometrik të pafundshëm dhe pastaj njehso atë shumë.

NJËSIA MODULARE 2

FUNKSIONET ELEMENTARE

Në këtë njësi modulare do të mësohen:

Koncepti për funksionin (fusha e përkufizimit, grafiku, bashkësia e vlerave, zero, monotonia, konveksiteti)

Funksioni linear

Funksioni katror

Funksioni i fuqisë me eksponent natyror, me eksponent racional, d.m.th., me eksponent real

Funksioni eksponencial.

Funksioni logaritmik

Koncepti për funksionin invers

Koncepti për periodiktetin e funksionit

Funksionet trigonometrike themelore

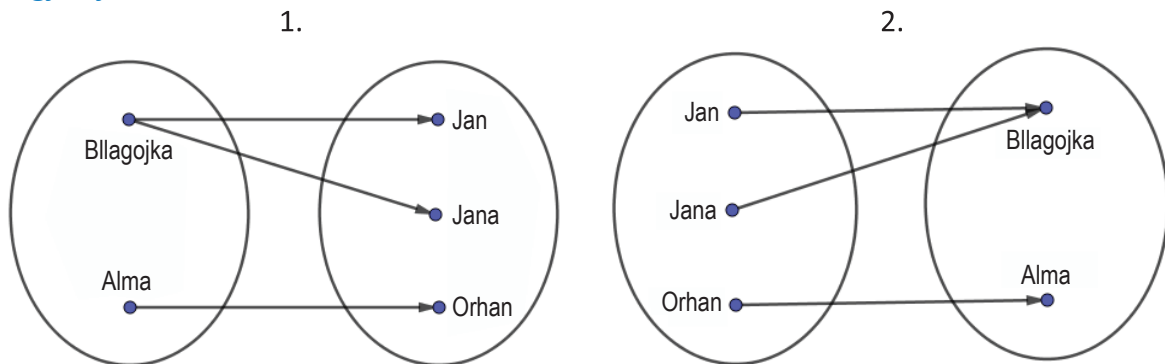
FUNKSIONET ELEMENTARE

1. KONCEPTI PËR FUNKSIONIN

Në vazhdim do të shqyrtojmë vetitë themelore (vetitë) të funksioneve.

Shembulli 1. Bllagojka është nëna e binjakeve Jan dhe Jana, ndërsa Orhani është djali i Almës. Te diagram i parë çdo nënë i është shoqëruar fëmija i saj. Te diagram i dytë çdo fëmije i është shoqëruar nëna e tij. Me cilin diagram është paraqitur pasqyrimi?

Zgjidhje:



Përkufizim: Le të jenë A dhe B dy bashkësi jo të zbrazëta dhe çdo elementi $x \in A$ le t'i shoqërojmë sipas ndonjë rregulle f , element të caktuar njëvlerësisht $y \in B$, atëherë themi se është përcaktuar **pasqyrim** f prej A në B dhe shkruajmë $: f: A \rightarrow B$

Duke e shfrytëzuar përkufizimin për pasqyrim, mund të sjellim përfundim se me diagramin 2 është paraqitur pasqyrim.

Përkufizim: Le të jenë X dhe Y nënbashkësi prej bashkësisë së numrave realë R . Çdo pasqyrim $f: X \rightarrow Y$ me të cilën çdo elementi x prej X i shoqërojmë saktë një element y prej Y quhet **funksion real**. Shënimi: $y = f(x)$.

Përkufizim: Grafiku i funksionit $f: X \rightarrow Y$ është bashkësi prej të gjithë çifteve të renditura $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$.

Elementet e bashkësisë X quhen argument, (origjinale, ndryshore të pavarura).

$f(x) \in Y$ quhet pasqyra (ndryshore të varura)

Funksionet mund të paraqiten analitikisht (me formula, shënim algjebrik), tabelare, me diagram ose grafikisht.

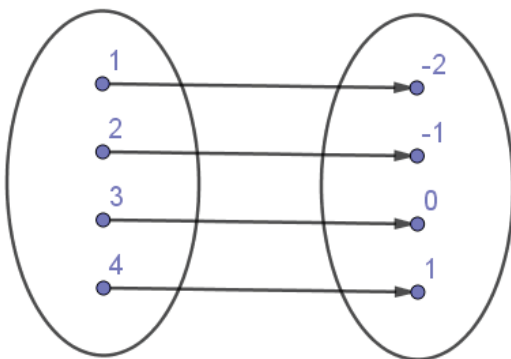
Shembulli 2. Numrat natyrorë prej bashkësisë $A = \{1, 2, 3, 4\}$ të zvogëlohen për 3. Të caktohet dhe të shkruhet funksioni artimetikisht (me rregullën e shoqërimit), tabelarisht, me diagram dhe grafikisht.

Paraqitja analitike e funksionit

$$f(x) = x - 3 \text{ për } A = \{1, 2, 3, 4\}, f: A \rightarrow B$$

$$B = \{-2, -1, 0, 1\}$$

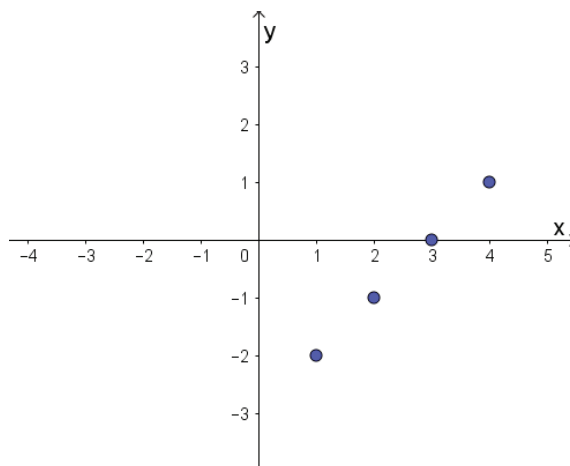
Funksioni është paraqitur me diagram



Paraqitja tabelare e funksionit

x	1	2	3	4
y	-2	-1	0	1

Paraqitja grafike e funksionit



1.1. FUSHA E PËRKUFIZIMIT TË FUNKSIONIT

Është dhënë **funksioni real** $f: X \rightarrow Y$, $X, Y \subseteq \mathbb{R}$.

Bashkësia e numrave realë $D_f = X$ prej ku argument i funksionit pranon vlera, d.m.th., për të cilët është përkufizuar funksioni, quhet **fusha e përkufizimit (domen)** i funksionit f dhe shënohet me D_f .

Bashkësia $V_f \subseteq Y$ është **bashkësia prej vlerave të funksionit f (kodomen)**, përbëhet, prej të gjitha pasqyrave të elementeve prej bashkësisë së përkufizimit $V_f = \{y | y = f(x), x \in X\}$.

Vërejtje: Funksioni $y = f(x)$ është përkufizuar (përcaktuar) për një vlerë $x = a$, domethënë se ekziston $f(a)$ dhe ajo vlerë mund të caktohet në pajtim me rregullën e shoqërimit. Nëse funksioni është përkufizuar për çdo vlerë prej intervalit (a, b) atëherë themi se funksioni është përkufizuar në atë interval. Fusha e përkufizimit përcaktohet varësisht prej shprehjes analitike me të cilën është dhënë funksioni. Fusha e përkufizimit të funksionit mund të jetë bashkësi e numrave realë pse ndonjë nënbashkësi e saj si interval (i hapur, i mbyllur, gjysmë i hapur ose gjysmë i mbyllur), union ii intervaleve ose pika të izoluar.

Funksioni $f(x)$ është plotësisht i përcaktuar nëse janë të njohur: fusha e përkufizimit D_f dhe rregulla f sipas të cilës përcaktohet vlera e funksionit.

Në praktikë, nëse funksioni i dhënë është përcaktuar me ndonjë shprehje analitike pa e shënuar domenin, do të llogaritet se domeni përbëhet prej të gjithë numrave realë për të cilët ajo shprehje analitike ka kuptim.

Në vazhdim t'i vërejmë fushat e disa funksioneve karakteristike.

Fusha e përkufizimit të disa funksioneve karakteristike

1.1.1. Fusha e përkufizimit të funksionit polinomial

Nëse funksioni $f(x)$ është dhënë me polinomin $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, ku n është numër i plotë jonegativ, atëherë fusha e tij e përkufizimit është gjithë bashkësis R ose $D_f = (-\infty, +\infty)$.

Shembulli 1. Funksionet:

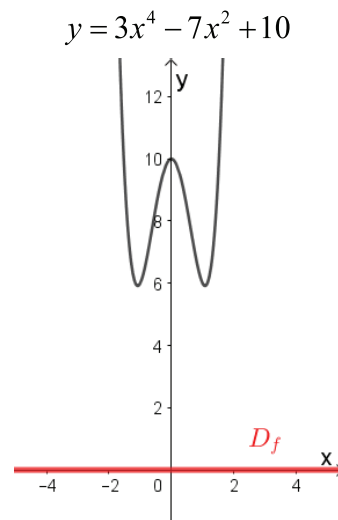
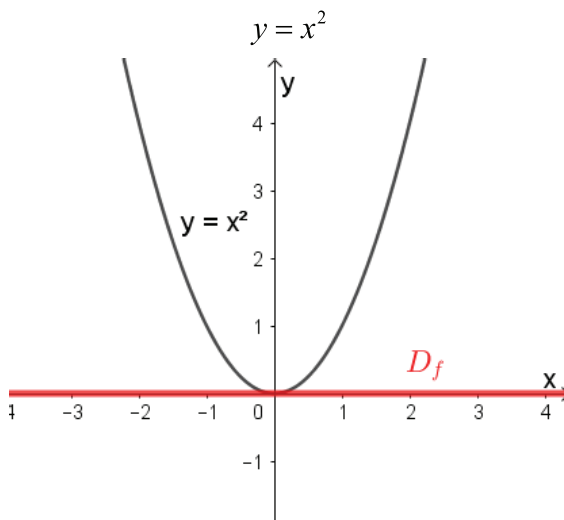
$$y = x^2,$$

$$y = 3x^4 - 7x^2 + 10,$$

$$y = -25x^7 + 4,5x^6 + x^3 - 12x + 5,$$

janë përkufizuar për çdo numër real dhe fusha e tyre e përkufizimit është $D_f = (-\infty, +\infty)$ ose $D_f = R$.

Te vizatimet grafike janë paraqitur fushat e përkufizimit të dy funksioneve të para polinomale.



Vërejtje: Me ngjyrë të kuqe janë paraqitur fushat e përkufizimit, d.m.th., vlerat e x për të cilin mundet të njehsohet vlera e funksionit.

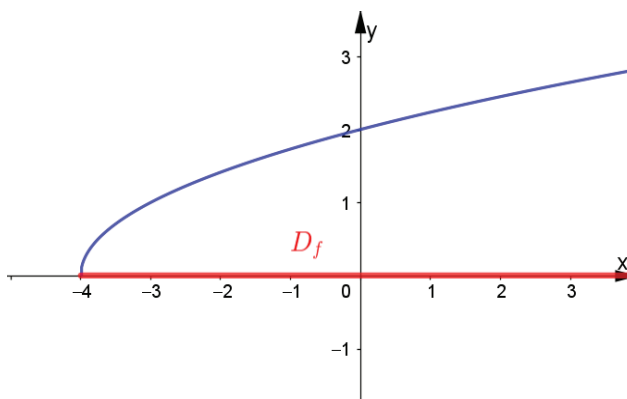
1.1.2. Fusha e përkufizimit të funksionit me tregues çift të rrënjës

Nëse funksioni gjendet nën shprehjen e rrënjës me tregues çift, $y = \sqrt[k]{f(x)}$, $k \in N$, atëherë fusha e përkufizimit përcaktohet prej pabarazimit $f(x) \geq 0$.

Shembulli 2. Të caktohet fusha e përkufizimit të funksionit $f(x) = \sqrt{x+4}$.

Zgjidhje: Fusha e përkufizimit përcaktohet prej kushtit $x + 4 \geq 0$.

Me zgjidhjen e këtij pabarazimi fitohet $x \geq -4$ dhe fusha e përkufizimit është $D_f = [-4, +\infty)$



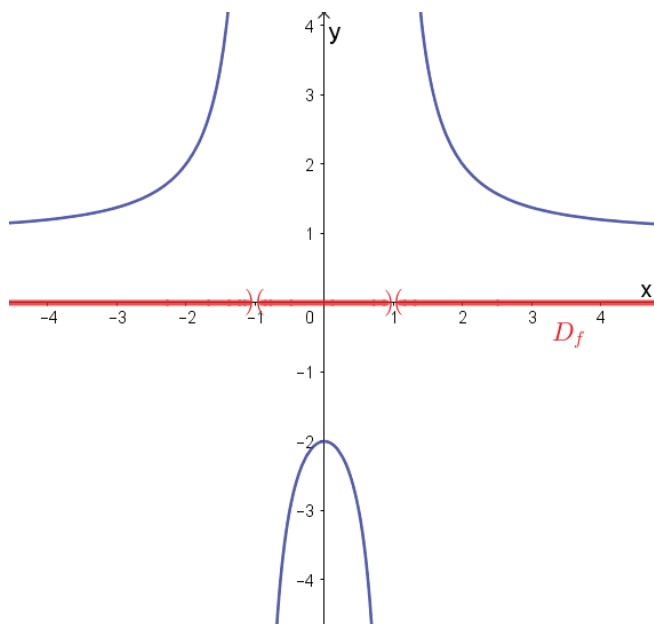
Vërejtje: Fusha e përkufizimit të funksionit ka tregues tek të rrënjës është bashkësia e numrave realë.

1.1.3. Fusha e përkufizimit të funksioneve racionale thyesore

Fusha e përkufizimit të funksionit $y = \frac{f(x)}{g(x)}$, përcaktohet prej kushtit $g(x) \neq 0$, pasi pjesëtimi me 0 nuk është përkufizuar.

Shembulli 3. Të përcaktohet fusha e përkufizimit të funksionit $y = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 1}$.

Zgjidhje: Fusha e përkufizimit përcaktohet prej kushtit $x^2 - 1 \neq 0$, vijon $x^2 \neq 1$ ose $x \neq \pm 1$ që do të thotë se prej bashkësisë së numrave realë hedhen dy pika $x = \pm 1$ d.m.th., $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ ose funksioni është përkufizuar në tre intervalë $D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.



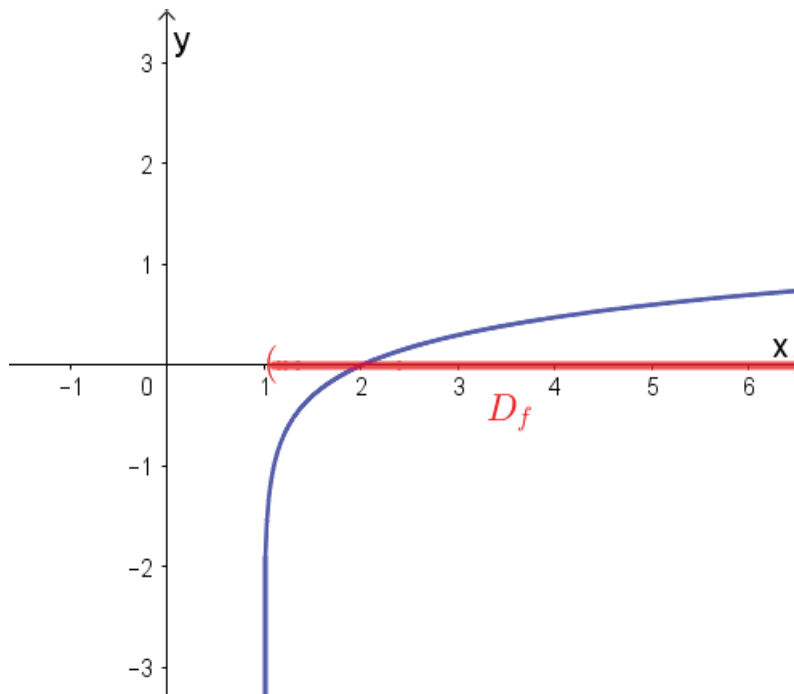
1.1.4. Fusha e përkufizimit të funksionit logaritmik

Fusha e përkufizimit të funksionit logaritmik $y = \log_a f(x)$ përcaktohet prej pabarazimit $f(x) > 0$, pasi logaritmet përkufizohen vetëm për numrat realë pozitiv.

Shembulli 4. Të përcaktohet fusha e përkufizimit të funksionit $f(x) = \log(x-1)$.

Zgjidhje: Fusha e përkufizimit përcaktohet me zgjidhjen e pabarazimit $x-1 > 0$.

Fitohet se $x > 1$ dhe përcaktohet fusha e përkufizimit $D_f = (1, +\infty)$.



Detyra 1. Cakto bashkësinë e përkufizimit të funksioneve:

a) $f(x) = x^3 - 3x$

b) $f(x) = \frac{x+5}{x^2-3x-4}$

c) $y = \log(4-x)$

ç) $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$

d) $f(x) = \sqrt{5-3x}$

dh) $f(x) = \sqrt[3]{x^2-4x+3}$

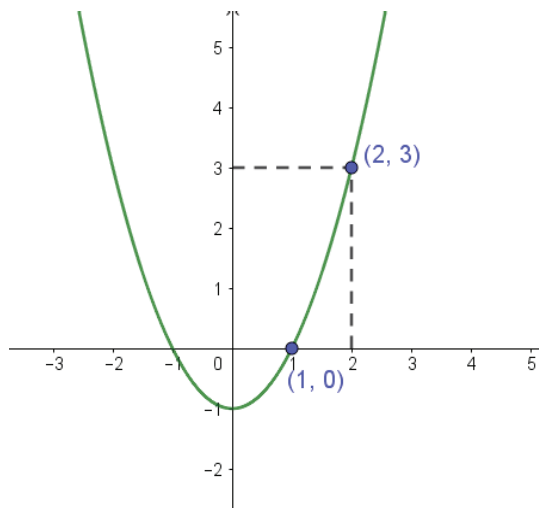
1.2. ZEROT E FUNKSIONIT

Shembulli 1. Është dhënë funksioni $f(x) = x^2 - 1$. Caktoi vlerat e funksionit për $f(1)$ dhe $f(2)$.

Zgjidhje: I gjejmë vlerat e $f(1)$ dhe $f(2)$.

$f(1) = 1^2 - 1 = 1 - 1 = 0$, fitohet pika me koordinata $(1, 0)$ e cila i takon grafikut të funksionit.

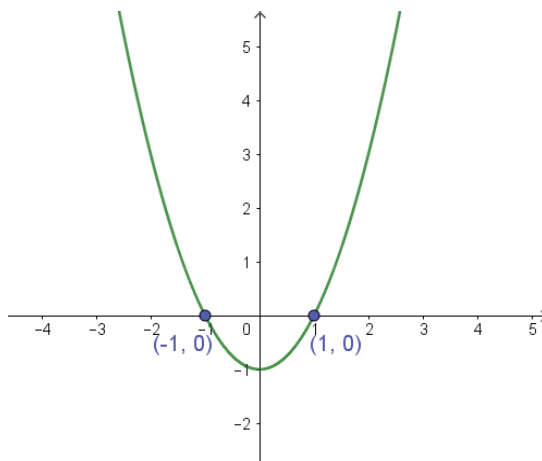
$f(2) = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$, fitohet pika me koordinata $(2, 3)$ e cila i takon grafikut të funksionit.



Çdo numër real $x_0 \in D_f$ për të cilin vlen $f(x_0) = 0$ quhet **zero** e funksionit.

Zerot e funksionit janë zgjidhje të barazimit $f(x) = 0$.

Me zgjidhjen e barazimit $f(x) = 0$ d.m.th., $x^2 - 1 = 0$, fitohen zgjidhjet $x_1 = -1$ dhe $x_2 = 1$ të cilët janë zero të funksionit.



Përkufizim: Zero të funksionit : $f: X \rightarrow Y$ quhen ato vlera të $x \in D_f$ për të cilët $f(x) = 0$. Ato janë pika me koordinata $(x, 0)$, të cilët grafiku i funksionit e pren boshtin x . Bashkësinë e zerove të funksionit do ta shënojmë me N_f .

Vlerat e funksionit $y = f(x)$ për argumentin $x = 0$ është koordinata e dytë e pikëprerjes së grafikut të funksionit me boshtin y . Koordinatat e pikës janë $(0, y)$.

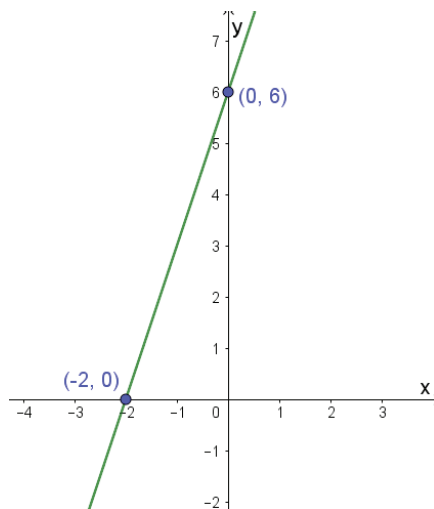
Vërejtje: Funksioni i cili është njëvlerësisht i caktuar mund të ketë më shumë pikëprerje me boshtin x , ndërsa më së shumti një pikëprerje me boshtin y .

Shembulli 2. Të gjenden zerot e funksionit $f(x) = 3x + 6$ dhe të caktohet prerja e grafikut të funksionit me boshtin y .

Zgjidhje: Zero të funksionit janë ato vlera të x për të cilët $f(x) = 0$, prej ku vijon se $3x + 6 = 0$. Zgjidhje e barazimit është $x = -2$. Bashkësia e zerove të funksionit është $N_f = \{-2\}$.

Për të gjetur prerjen e funksionit me boshtin y duhet të zëvendësojmë $x = 0$, pra fitohet $f(0) = 3 \cdot 0 + 6 = 6$. Koordinatat e pikëprerjes së funksionit me boshtin y është $(0, 6)$. Pikëprerja e funksionit me boshtin x është pika me koordinata $(-2, 0)$.

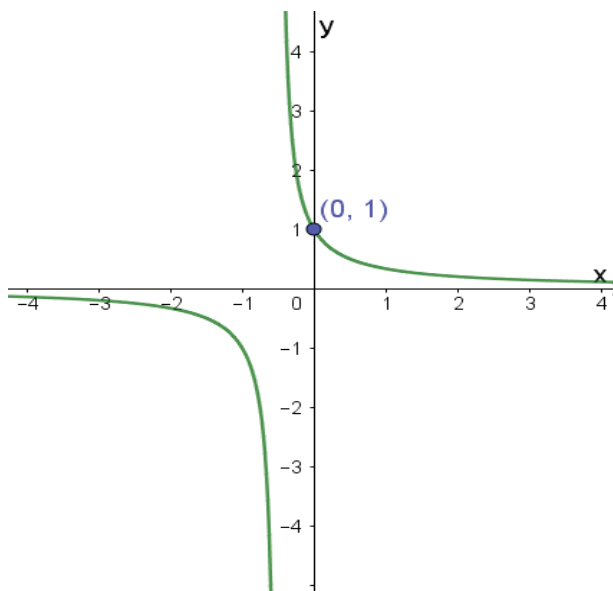
Paraqitja grafike e funksionit



Shembulli 3. Të caktohen zerot e funksionit $f(x) = \frac{1}{2x+1}$, ndërsa të caktohet prerja e funksionit me boshtin y .

Zgjidhje: Prej $f(x) = 0$, vijon $1 = 0$, që nuk është e saktë dhe përfundohet se barazimi nuk ka zgjidhje.

Bashkësia e zerove është $N_f = \emptyset$ përkatësisht funksioni nuk e prej boshtin x .



Nëse zëvendësojmë për $x = 0$, fitohet $f(0) = \frac{1}{2 \cdot 0 + 1} = \frac{1}{1} = 1$. Koordinatat e pikëprerjes me boshtin y janë $(0, 1)$.

Detyra 2. Cakto zerot e funksioneve:

a) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x}$

b) $y = x^3 - x$

c) $f(x) = 2^{x+5}$

ç) $f(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$

d) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

dh) $f(x) = \sqrt{x(x-1)(x-2)}$

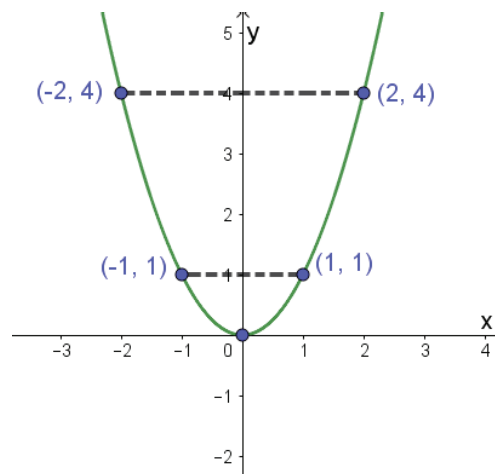
1.3. FUNKSIONET ÇIFT DHE TEK

Shembulli 1. Te figura është dhënë grafiku i funksionit $f(x) = x^2$.

Çka mund të vërejmë për vlerat $f(-2), f(-1), f(1), f(2)$. Fitohet se $f(1) = f(-1) = 1, f(2) = f(-2) = 4$.

Në përgjithësi për funksionin e dhënë $f(-x) = f(x)$ për çdo $x \in D_f$.

Grafiku i funksionit $f(x) = x^2$ është simetrike në lidhje me boshtin y .



Përkufizimi. Funkzioni $f: X \rightarrow Y$ me fushën e përkufizimit D_f (që është bashkësi simetrike në lidhje me fillimin e koordinatave, d.m.th., për çdo $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$),

- është **çift** për çdo $x \in D_f$, vlen $f(-x) = f(x)$,
- është **tek** nëse për çdo $x \in D_f$ vlen $f(-x) = -f(x)$.

Vërejtje: Për shqyrtimin e funksionit çift të funksioneve, së pari duhet të jetë plotësuar kushti për simetri të fushës së përkufizimit. (D_f është fushë simetrike nëse për çdo $x \in D_f$, atëherë edhe $-x \in D_f$).

Vërejtje:

Grafiku i funksionit çift është simetrik në lidhje me boshtin y .

Grafiku i funksionit tek është simetrik në lidhje me fillimin e koordinatave.

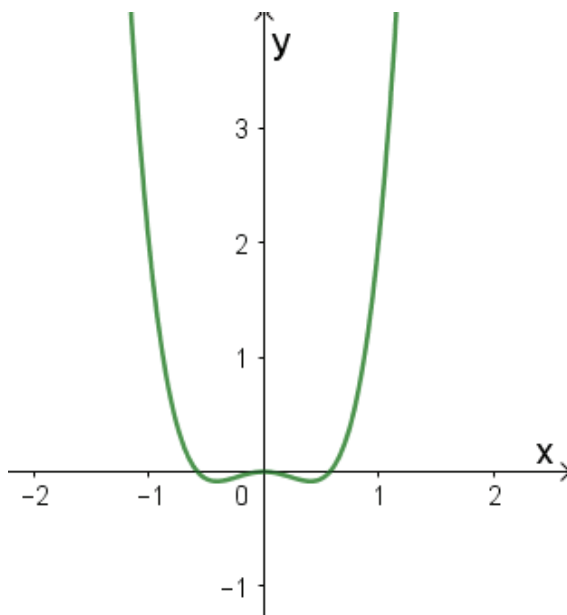
Ekzistojnë edhe funksione të cilat janë as çift as tek.

Shembulli 2. Të caktohet funksioni i çiftëzisë së funksionit $f(x) = 3x^4 - x^2$.

Zgjidhje: Fusha e përkufizimit është $D_f = \mathbb{R}$ dhe është fushë simetrike

$$f(-x) = 3(-x)^4 - (-x)^2 = 3x^4 - x^2 = f(x)$$

Vijon se, funksioni është çift. Grafiku është simetrik në lidhje me boshtin y .

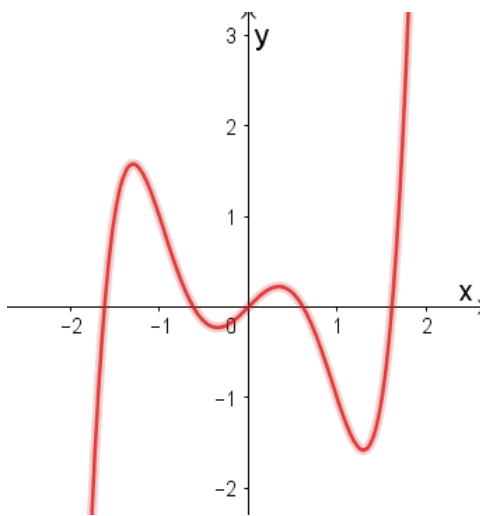


Shembulli 3. Të caktohet funksioni çift për funksionin $f(x) = x^5 - 3x^3 + x$.

Zgjidhje: Fusha e përkufizimit është $D_f = \mathbb{R}$.

$$f(-x) = (-x)^5 - 3(-x)^3 + (-x) = -x^5 + 3x^3 - x = -(x^5 - 3x^3 + x) = -f(x)$$

Vijon se, funksioni është tek. Grafiku i funksionit është simetrik në lidhje me fillimin e koordinatave.



Detyra 3. Shqyrto çiftin e funksioneve:

a) $f(x) = 3x^2 - 1$

b) $f(x) = \frac{x^4 - 3x^2}{x}$

c) $f(x) = \frac{3x}{x-1}$

ç) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x}$

d) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

dh) $f(x) = 3x^5 + 2x^7$

1.4. KUFIZIMI I FUNKSIONIT

Përkufizim: Është dhënë funksioni $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Për funksionin $f(x)$ themi se është:

- I kufizuar prej lartë nëse ekziston numër real M ashtu që $f(x) \leq M$ për çdo x prej fushës së përkufizimit të $f(x)$,
- I kufizuar prej poshtë nëse ekziston numër real m ashtu që $f(x) \geq m$ për çdo x prej fushës së përkufizimit të $f(x)$,
- I kufizuar, nëse ekzistojnë numra realë m dhe M të atillë që $m \leq f(x) \leq M$ për çdo x prej fushës së përkufizimit të $f(x)$, d.m.th., funksioni është i kufizuar prej lartë dhe prej poshtë.

Shembulli 1. Të konstatohet vallë funksioni $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$ është i kufizuar prej poshtë!

Zgjidhje: Për çdo numër real x , $x^2 \geq 0$.

$$\text{Prej, } x^2 \geq 0 \quad / \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}x^2 \geq 0 \quad / +1$$

$$\frac{1}{2}x^2 + 1 \geq 0 + 1$$

$$\frac{1}{2}x^2 + 1 \geq 1 \quad \text{d.m.th. } f(x) \geq 1$$

Vijon, funksioni është i kufizuar prej poshtë me 1.

Detyra 4. Vërteto se funksionet janë të kufizuara:

a) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ b) $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$

Vërteto se funksionet janë të kufizuara prej lartë:

c) $f(x) = 1 - x^2$ ç) $f(x) = 1 - 2^x$

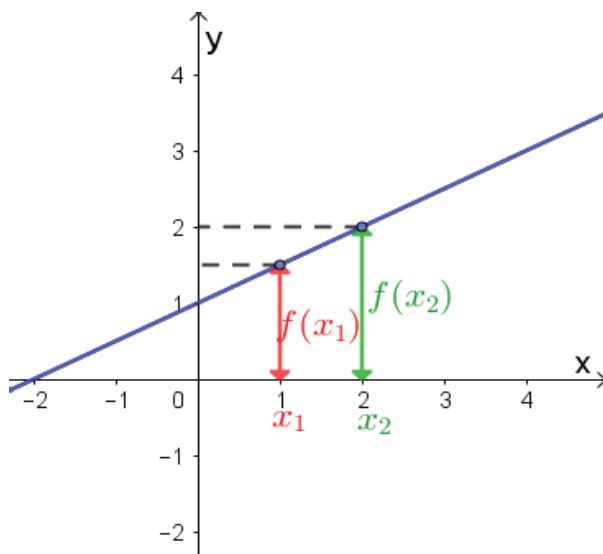
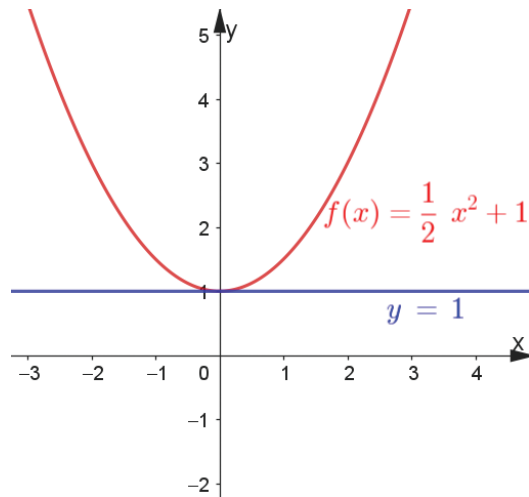
Vërteto se funksionet janë të kufizuara prej poshtë:

d) $f(x) = x^2 - 4$ dh) $f(x) = 3^{x+2}$

1.5. MONOTONIA E FUNKSIONIT

Te figura është paraqitur grafiku i funksionit $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$. Fusha e përkufizimit të funksionit është $D_f = \mathbb{R}$.

Për çfarëdo dy vlera të ndryshme x_1 dhe x_2 prej bashkësisë së përkufizimit për të cilët vlen $x_1 < x_2$, mund të vërehet se për vlera të mëdha të argumentit, përgjigjet vlerë më e madhe e funksionit, $f(x_1) < f(x_2)$. Themi se funksioni rritet në fushën e përkufizimit, intervali $(-\infty, +\infty)$.



Le të jetë dhënë funksioni $f: R \rightarrow R$

Përkufizimi. Për funksionin $f(x)$ me fushën e përkufizimit D_f dhe intervali (a, b) i cili i takon fushës së përkufizimit, themi se:

- është (rigoroz) **monotono rritës** në intervalin (a, b) , nëse për çfarëdo $x_1, x_2 \in (a, b)$ të atillë që $x_1 < x_2$, vlen $f(x_1) < f(x_2)$,
- është (rigoroz) **monotono zvogëlues** në intervalin (a, b) , nëse për çfarëdo $x_1, x_2 \in (a, b)$ të atillë që $x_1 < x_2$, vlen $f(x_1) > f(x_2)$

Funksionet të cilat janë monotono rritës ose monotono zvogëlues quhen funksione monotone.

Nëse nuk vlen jobarazimi strikt atëherë themi se funksioni është rritës ose zvogëlues.

Shembulli 1. Të caktohet monotonia e funksionit $f(x) = 1 - x^3$, në të gjithë fushën e përkufizimit.

Zgjidhje: Fusha e përkufizimit të funksionit është $f D_f = R$.

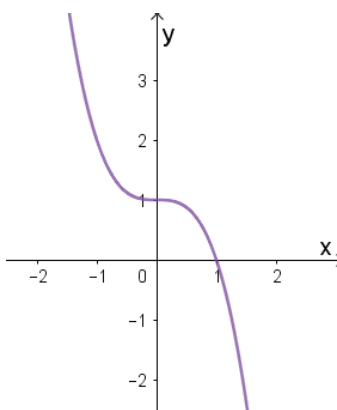
Le të jenë $x_1, x_2 \in D_f$, të atillë që $x_1 < x_2$, atëherë $x_1^3 < x_2^3$.

Prej $x_1^3 < x_2^3$ / $\cdot (-1)$

$-x_1^3 > -x_2^3$ / shtojmë 1 prej të dy anëve të pabarazimit

$1 - x_1^3 > 1 - x_2^3$ d.m.th., $f(x_1) > f(x_2)$.

Vijon, $f(x)$ është monotone zvogëlues rigoroz në të gjithë fushën e përkufizimit.



Detyra 5. Shqyrto monotoninë e funksioneve:

a) $f(x) = 2x - 5$

b) $f(x) = 2 - 4x$

c) $f(x) = \ln x$

ç) $f(x) = 1 - x^3$

d) $f(x) = 2x^3 + 1$

dh) $f(x) = 1 - \ln x$

Detyra për ushtrime:

1. Cakto fushën e përkufizimit të funksioneve:

$$\text{a) } f(x) = x^5 - 4x^3 + 1 \quad \text{b) } f(x) = \frac{3x}{x^2 + 9} \quad \text{c) } f(x) = \frac{3x}{x^2 - 9}$$

2. Cakto fushën e përkufizimit të funksioneve:

$$\text{a) } y = \sqrt{2 - 3x} \quad \text{b) } y = \sqrt[3]{2 - 3x}$$

3. Cakto fushën e përkufizimit të funksioneve:

$$\text{a) } g(x) = \log(x^2 - 4) \quad \text{b) } f(x) = \ln(x - 1) + \sqrt{5 - x}$$

4. Cakto fushën e përkufizimit të funksioneve:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= \frac{3x + 7}{x^2 - 5x} & \text{b) } f(x) &= \frac{2x - 1}{x^2 - 4x + 3} & \text{c) } f(x) &= \sqrt{x^2 - 3x + 2} \\ \text{ç) } f(x) &= \frac{x - 1}{\sqrt{x + 4}} & \text{d) } f(x) &= \log(x + 3) + \log(x - 3) & \text{dh) } f(x) &= \log(16 - x^2) \end{aligned}$$

5. Është dhënë funksioni $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$. Cakto vlerat: $f(-1)$, $f(2)$, $f(0)$, $f(a)$.6. Cakto funksionin $f(x) = ax + b$, nëse $f(2) = -5$ dhe $f(-1) = 1$ 7. Cakto funksionin $f(x) = ax^2 + bx + 3$, nëse $f(1) = 4$ dhe $f(-2) = -5$

8. Cakto zerot e funksionit

$$\text{a) } f(x) = -x^2 + 3x - 2 \quad \text{b) } f(x) = 3x - 2$$

9. Cakto zerot e funksionit

$$\text{a) } f(x) = \frac{x^5 - 5x^3 + 4x}{x - 2} \quad \text{b) } f(x) = \frac{x^3 - 27}{x^3 + 27}$$

10. Cakto zerot e funksionit

$$\text{a) } f(x) = 3^{x^2 - 3} - 3 \quad \text{b) } f(x) = \log(x^2 + 2x) - 3$$

11. Cakto fushën e përkufizimit dhe zerot e funksioneve:

$$\text{a) } f(x) = 8 - 2x - x^2 \quad \text{b) } f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 3}{x - 4} \quad \text{c) } f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$$

ç) $f(x) = 5^x - 25$

d) $f(x) = \log(x+2) - 3$

12. Konstatohet cili prej këtyre funksioneve është çift, tek, ndërsa cili as çift as tek:

a) $f(x) = 2x^7 - x^5 + 3x^3$

b) $f(x) = \frac{3x^2}{4-x^2}$

c) $f(x) = x^3 + 2 + \sin x$

13. Konstatohet cili prej këtyre funksioneve është çift, tek, ndërsa cili as çift as tek:

a) $f(x) = 2x^7 - x^5 + 3x^3$

b) $f(x) = \frac{3x^2}{4-x^2}$

c) $f(x) = x^3 + 2 + \sin x$

14. Shqyrto çiftin e funksionit:

a) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 4$

b) $f(x) = \frac{2x^2 - 5}{x^2 + 1}$

c) $f(x) = x^2 - \sin x$

ç) $f(x) = \frac{\cos x}{x}$

d) $f(x) = (x-1)^2$

e) $f(x) = \frac{x \sin x}{1 + \cos x}$

15. Shqyrto monotoninë e funksioneve, fushën e përkufizimit:

a) $f(x) = 4x + 7$

b) $f(x) = x^3$

c) $f(x) = 1 - x^3$

ç) $f(x) = \log(x-3)$

d) $f(x) = \frac{1}{x}$

16. Cakto cili prej funksioneve janë të kufizuar, ndërsa cilët të pakufizuar:

a) $f(x) = \frac{3}{1+x^2}$

b) $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

c) $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$

ç) $f(x) = 5 \cos x$

d) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{1+x^2}$

dh) $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{1+x^2}\right)$

17. Cakto funksionet e përbëra (kompozimi prej funksioneve) $f \circ g$ dhe $g \circ f$:

a) $f(x) = x^2 + 1, x \in \mathbb{R}$ dhe $g(x) = 2 - 3x, x \in \mathbb{R}$

b) $f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}$ dhe $g(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$

- c) $f(x) = 2x + 1, x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ dhe $g(x) = \frac{1}{x+5}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-5\}$
 ç) $f(x) = \lg x, x \in [1, +\infty)$ dhe $g(x) = \sqrt{x}, x \in (0, +\infty)$.

Vërejtje:

Përbërja (kompozicioni) i funksioneve keni mësuar në vitet paraprake shkollore. Të përkujtohem në përkufizimin.

Përkufizimi. Funksioni f le të jetë përkufizuar në bashkësinë D_f dhe le të jetë g funksion i përkufizuar në bashkësinë D_g , ashtu që $V_f = \{f(x) \mid x \in D_f\} \subseteq D_g$. Atë herë bashkësia D_f është përkufizuar kompozicioni (funksion i përbërë) prej funksioneve f dhe g të shënuar $g \circ f$, me këtë rregull të shoqërimit $(g \circ f)(x) = g(f(x)), x \in D_f$.

18. Cakto funksionin f nëse $h = g \circ f$:

- a) $h(x) = (3x - 7)^5, x \in \mathbb{R}$ dhe $g(x) = x^5, x \in \mathbb{R}$
 b) $h(x) = \sqrt{4 - x^2}, x \in [-2, 2]$ dhe $g(x) = \sqrt{x}, x \in [0, +\infty)$
 c) $h(x) = \sin^3 x, x \in \mathbb{R}$ dhe $g(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$

2. FUNKSIONI LINEAR

Të përkujtohem!

Funksionet elementare themelore janë këto funksione:

- Funksioni konstant $y = c$ ($c = \text{const}$)
- Funksioni i fuqisë $y = x^r$, $r \in \mathbb{R}$
- Funksioni eksponencial $y = a^x$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- Funksioni logaritmik $y = \log_a x$, $a \neq 0$
- Funksionet trigonometrike: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$

Përkufizimi. Çdo funksion i cili mund të fitohet prej funksioneve elementare themelore me zbatimin e herë numrit të fundshëm të operacioneve aritmetike (mbledhje, zbritje, shumëzim dhe pjesëtim) dhe operacioni i kompozicionit (përbërje) quhet **funksion elementar**.

Në vazhdim do të ndalemi te grafikët dhe vetitë që vlejné për disa prej funksioneve elementare.

Funksioni elementar

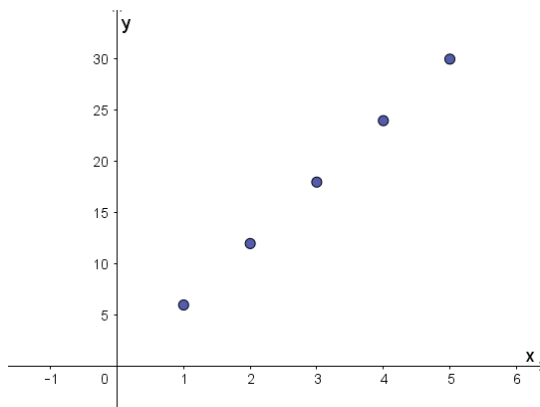
Shembulli 1. Petri vozit çdo ditë biçikletën e tij nga 6 km deri te shkolla dhe prapa. Të njehsohet sa kilometra kalon Petri për një javë. Të caktohet se si ndryshon shumta e kilometrave të kaluar sipas ditëve me ndihmën e funksionit ku ndryshorja (argument) është dita.

Zgjidhje: Rezultatet mund të shkruhen te tabela

Dita	1	2	3	4	5	1 javë
km të kaluar	6	12	18	24	30	30

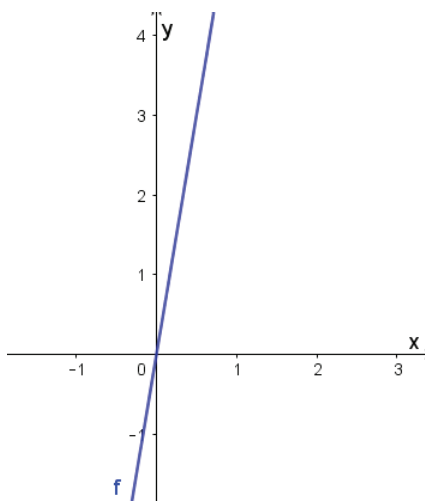
Rregullën algjebrike mund ta shkruajmë me formulën $f(x) = 6x$, ku fusha e përkufizimit është $D_f = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Funksionin mund ta paraqesim grafikisht me pika në sistemin koordinativ.



Vërejtje: Njësia e boshtit x dhe y nuk janë të barabarta, shfrytëzohet përpjesa (Boshti x : Boshti y) = 1:5 për paraqitje më të mire të grafiku.

Nëse shkruajmë se fusha e përkufizimit të funksionit $f(x) = 6x$ është $D_f = R$ atëherë funksioni grafikisht është paraqitur me drejtëz.



Vërejtje: Njësitë e boshtit x dhe y janë të barabarta, shfrytëzojmë përpjesën 1:1.

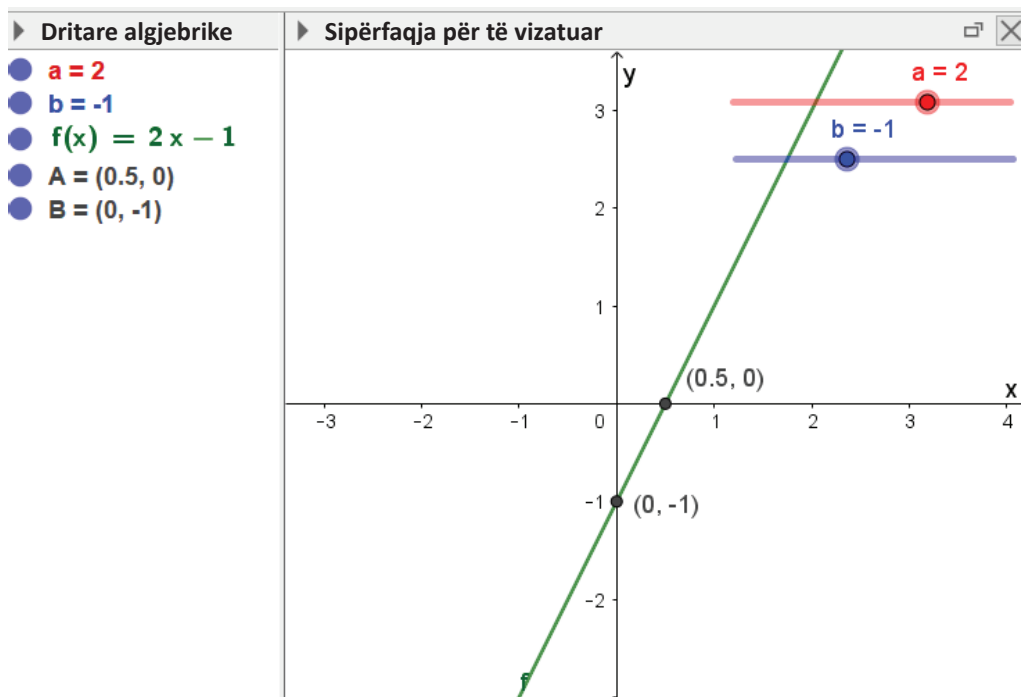
Funksioni $f(x) = ax + b$ quhet funksion linear.

Grafiku i funksionit linear është drejtëz. Për ta skicur grafikun e funksionit është e nevojshme të caktojmë më së paku dy pika të cilat shtrihen te drejtëza.

Fusha e përkufizimit është bashkësia e numrave realë d.m.th., $D_f = R$

Bashkësia e vlerave është bashkësia e numrave realë d.m.th., $V_f = R$

Është dhënë shembull të funksionit linear me koeficientët a dhe b të cilët te apleti i dhënë në geogebra janë vlerat prej rrëshqitësve për a dhe b . Cilat veti do të vlejnjë për funksionin linear?



<https://www.geogebra.org/m/d3uummybd>

Për $y = 0$, kemi $x = -\frac{b}{a}$, $a \neq 0$. Zero e funksionit është $x = -\frac{b}{a}$ d.m.th., $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ funksioni e pren boshtin x .

Për $x = 0$, kemi $y = b$. Në pikën $(0, b)$ funksioni e pren boshtin y .

Koeficientët e drejtimit të drejtëzës është i barabartë me tangjensin e këndit që drejtëza e formon me boshtin x , d.m.th., $a = \tan \alpha$ koeficienti i drejtimit.

Nëse $a > 0$ funksioni monotonisht rritet, ndërsa nëse $a < 0$, atëherë funksioni monotonisht zvogëlohet.

Funksioni linear nuk ka ekstreme.

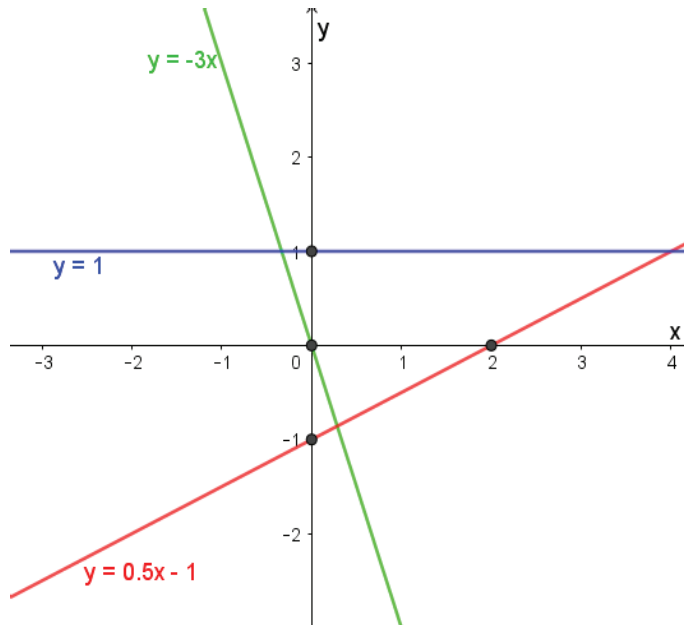
Funksione lineare karakteristike:

- $y = ax$ – kalon nëpër fillimin e koordinatave
- $y = b$ është paralele me boshtin x (funksion konstant)

Nëse shkruajmë $x = a$, atëherë grafiku është drejtëz paralel me boshtin y .

Vërejtje: Dy drejtëza $y = a_1x + b_1$ dhe $y = a_2x + b_2$ janë paralele nëse $a_1 = a_2$, ndërsa janë reciprokisht normale nëse $a_1 \cdot a_2 = -1$

Shembulli 2. Janë dhënë grafikët e funksioneve $y = -3x$, $y = \frac{1}{2}x - 1$ dhe $y = 1$. Cakto vlerat karakteristike dhe shkruaj cilat veti vlejné për funksionet.



Zgjidhje: Të shqyrtojmë vetëm një funksion.

Për funksionin $y = -3x$, mund ta caktojmë

fushën e përkufizimit është $D_f = R$ dhe bashkësinë e vlerave është $V_f = R$.

Zero e funksionit është 0, d.m.th., $(0,0)$ është pikëprerja me boshtin x , ndërsa njëkohësisht është edhe pikëprerja edhe me boshtin y .

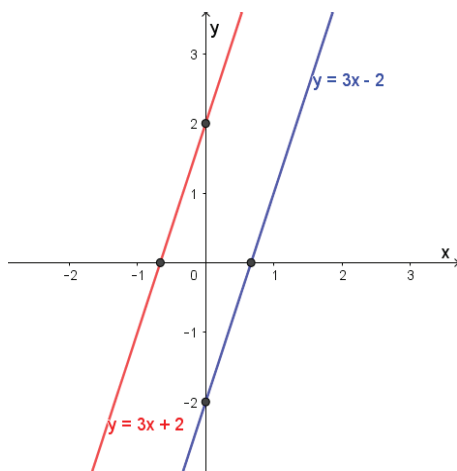
Funksioni është monotono zvogëlues, pasi $a = -3 < 0$.

Shembulli 3. Janë dhënë grafikët e funksioneve:

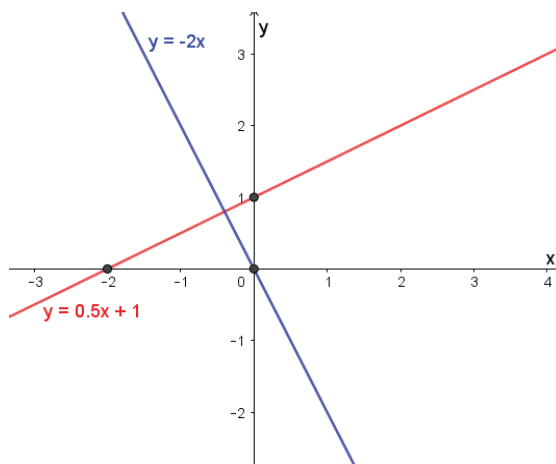
a) $y = 3x + 2$ dhe $y = 3x - 2$ dhe b) $y = \frac{1}{2}x + 1$ dhe $y = -2x$.

Cilat drejtëza janë paralele, ndërsa cilat janë reciprokisht normale? Kontrolllo çka vlen për koeficientët e tyre

a)



b)



Zgjidhje: Drejtëzat $y = 3x + 2$ dhe $y = 3x - 2$ janë paralele dhe koeficientët e drejtimeve janë të barabartë me 3, d.m.th., $a_1 = a_2 = 3$.

Drejtëzat $y = \frac{1}{2}x + 1$ dhe $y = -2x$ janë reciprokisht normale dhe për prodhimin e koeficientëve të drejtimit vlen $a_1 \cdot a_2 = \frac{1}{2} \cdot (-2) = -1$.

Detyra për ushtrime:

1. Të skicohet grafiku i funksioneve linear me caktimin më së paku dy pikave të cilat i takojnë drejtëzës:

a) $f(x) = x + 1$, b) $f(x) = -x + 3$, c) $y = \frac{1}{3}x + 2$, ç) $y = -1$.

2. Shkruaje barazimin e drejtëzës që kalon nëpër pikën $A(3, 2)$ dhe është:

- a) paralele me boshtin x ;
- b) paralele me boshtin y ;
- c) paralele me drejtëzën $f(x) = x + 3$
- ç) normale në drejtëzën $g(x) = 2x - 1$.

Skico grafikun e funksioneve. Mund të shfrytëzosh Geogebra për paraqitje vizuale.

3. Cakto koeficientët a dhe b te funksioni $f(x) = ax + b$ nëse ajo kalon nëpër:

- a) pikat $A(1, 2)$ dhe $B(2, 5)$;
- b) fillimin e koordinatave dhe pikën $C(4, 2)$.

4. Si është barazimet e drejtëzave që janë simetrike me:

- a) kuadrantin e parë dhe të tretë; b) kuadrantin e dytë dhe të katërt.

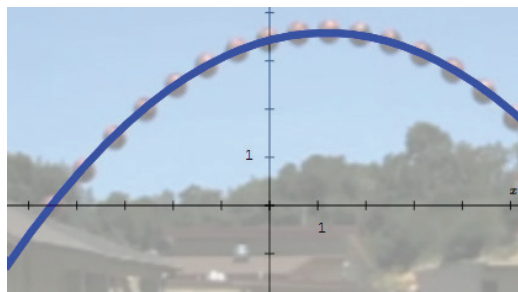
Skico grafikun e funksioneve. Mund të shfrytëzosh Geogebra për paraqitje vizuale.

3. FUNKSIONI KATROR

Shembulli 1. Basketbollisti Ivo, para shtëpisë së tij ka kosh tek i cili luan basketboll. Te animacioni, që lëviz topi lë gjurmë. Nëse lidhen pikat me lakoren, çka do të paraqet?



Me lidhjen e pikave dhe shfrytëzimi i apletit në geogebër mund të vërejmë se rruga e topit paraqet grafikun e funksionit katror.



Funksioni $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ quhet funksion katror

Grafiku i funksionit katror është **parabolë**. Për ta skicuar grafikun e funksionit është e nevojshme të caktojmë disa pika karakteristike.

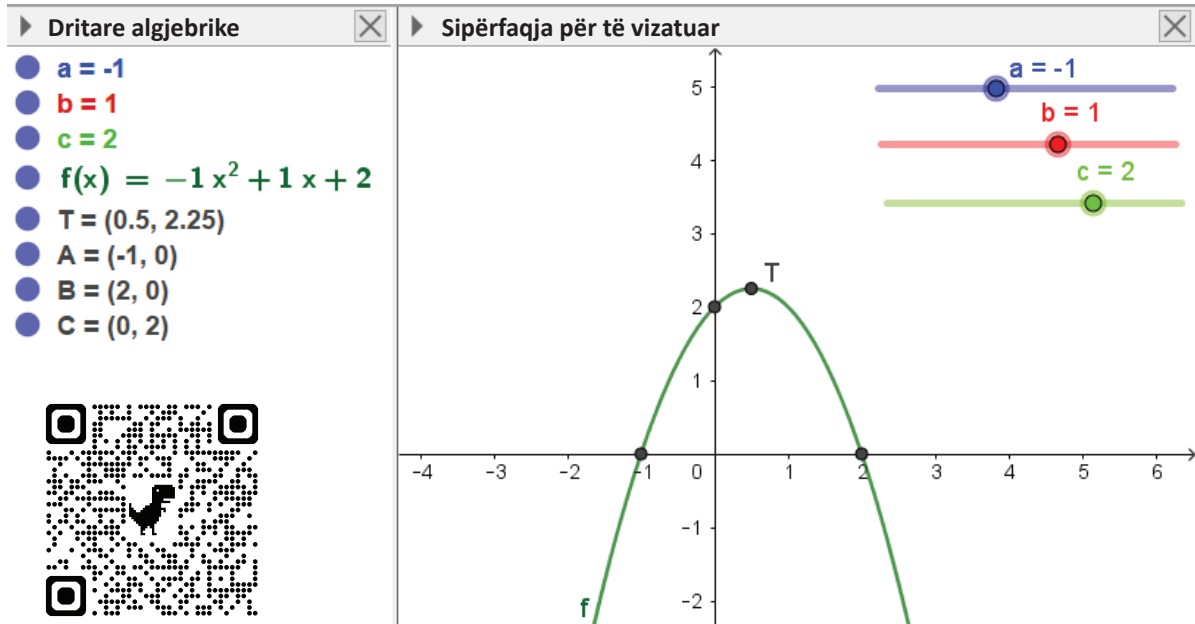
Fusha e përkufizimit është bashkësi e numrave realë d.m.th., $D_f = R$

Parabola ka kulm $T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ d.m.th., $T\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$

Bashkësia e vlerave, $V_f = \left[f\left(-\frac{b}{2a}\right), +\infty \right)$ për $a > 0$, përkatësisht $V_f = \left(-\infty, f\left(-\frac{b}{2a}\right) \right]$ për $a < 0$.

$x = -\frac{b}{2a}$ është boshti i simetrisë.

Është dhënë shembulli i funksionit katror me koeficientët a , b dhe c , të cilët te apleti në geogebër janë vlerat e rrëshqitësve për a , b dhe c . Cilat veti do të vlejnjë për funksionin katror?



<https://www.geogebra.org/m/pgcjinhj>

Zerot e funksionit fitohen për $y = 0$, ndërsa me zgjidhjen e barazimit $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, kemi:

i) Nëse $D = b^2 - 4ac > 0$, atëherë funksioni ka dy zero $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $x_1 \neq x_2$ d.m.th., pikëprerjet me boshtin x janë $(x_1, 0)$ dhe $(x_2, 0)$.

ii) Nëse $D = b^2 - 4ac = 0$, atëherë funksion i ka një zero $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$, d.m.th., pikëprerja (pika e prekjes) me boshtin x është $(x_1, 0)$

iii) Nëse $D = b^2 - 4ac < 0$, atëherë funksioni nuk ka zero, zgjidhjet e barazimit $x_1, x_2 \notin R$ dhe funksioni nuk e pren boshtin x .

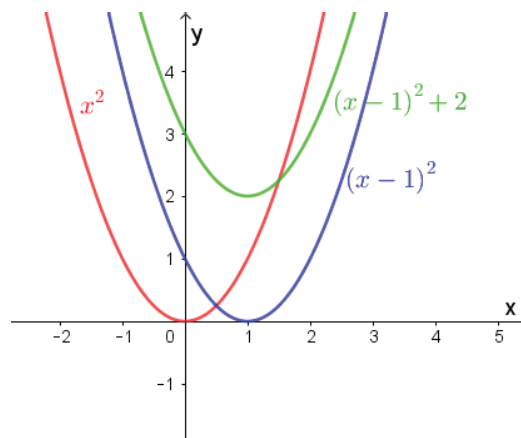
Për $x = 0$, kemi $y = c$. Në pikën $(0, c)$ funksioni e pren boshtin y .

Monotonia e funksionit:

- Nëse $a > 0$, atëherë në intervalin $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ zvogëlohet, ndërsa në intervalin $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ funksioni rritet.
- Nëse $a < 0$, atëherë në intervalin $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ rritet, ndërsa në intervalin $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ funksioni zvogëlohet.

Për $a > 0$ funksioni arrin minimum te kulmi T , ndërsa për $a < 0$ funksioni arrin maksimum te kulmi T .

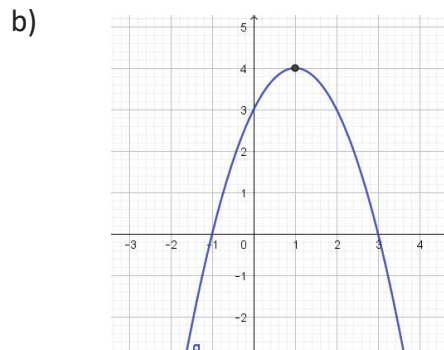
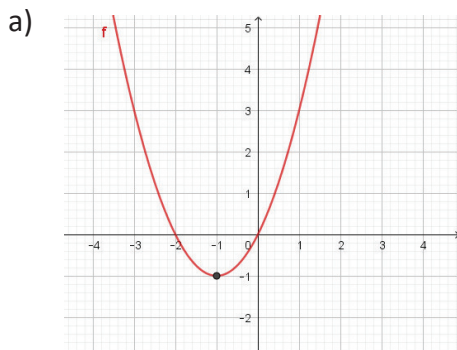
Shembulli 2. Grafikët e funksioneve katrore $y = x^2$, $y = (x-1)^2$, $y = (x-1)^2 + 2$ janë dhënë te figura.



Vërejtje:

Funksioni katror i shkruar në formën $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ quhet forma kanonike e funksionit katror, ku $a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ dhe (α, β) janë koordinatat e kulmit T .

Shembulli 3. Të caktohen koordinatat e kulmit të funksionit katror $f(x) = ax^2 + bx + c$. Të caktohet shenja e parametrin a , intervalet e monotonies dhe pikëprerjet me boshtet e koordinatave.

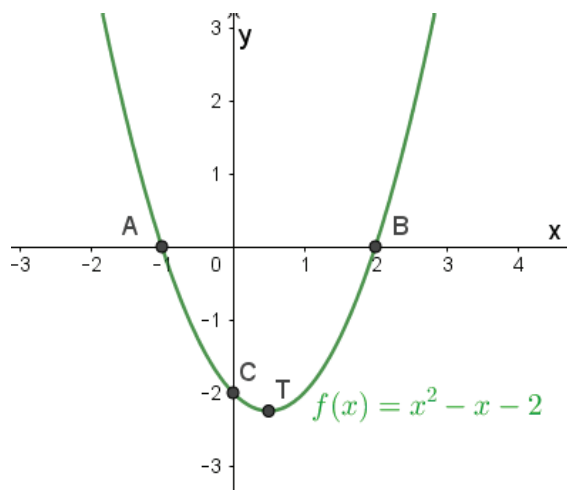


Zgjidhje:

a) Kulmi i ka koordinatat $(-1, -1)$. Parametri është $a > 0$. Në intervalin $(-\infty, 1)$ funksioni zvogëlohet, ndërsa në intervalin $(1, +\infty)$ rritet. Pikëprerjet me boshtin x janë $(2, 0)$ dhe $(0, 0)$, ndërsa prerja me boshtin y është e njëjta pikë $(0, 0)$.

b) Kulmi i ka koordinatat $(1, 4)$. Parametri $a < 0$. Në intervalin $(-\infty, 1)$ funksioni rritet, ndërsa në intervalin $(1, +\infty)$ funksioni zvogëlohet. Pikëprerja me boshtin x janë pikat me koordinata $(-1, 0)$ dhe $(3, 0)$, ndërsa prerja me boshtin y është pika $(0, 3)$.

Shembulli 4. Të skicohet grafiku i funksionit $f(x) = x^2 - x - 2$.

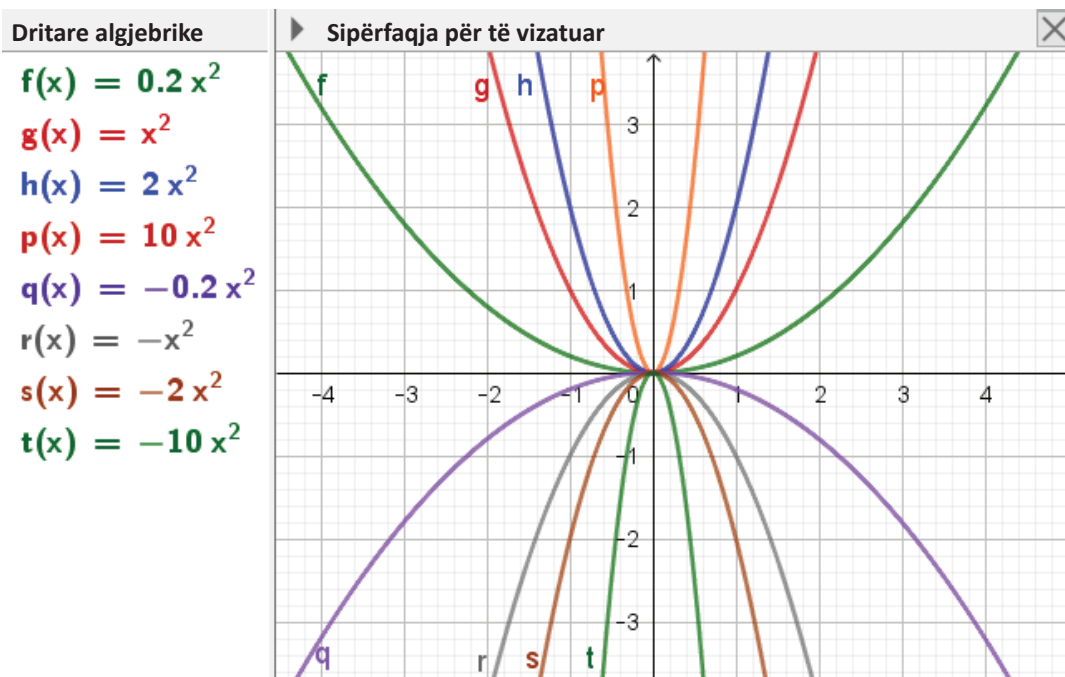
Zgjidhje:**Vërejtje:**

Për të caktuar edhe disa veti të funksionit katror do të shqyrtojmë shembull të funksionit katror ku koeficientët b dhe c janë zero d.m.th., $b = 0$ dhe $c = 0$. Vetitë do të vlejnjë edhe për funksionin katror me çfarëdo koeficient.

Për funksionin katror $f(x) = ax^2$, mënjanimi i parabolës varet prej vlerës absolute të koeficientit katror.

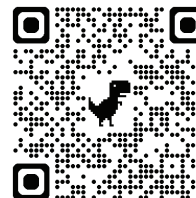
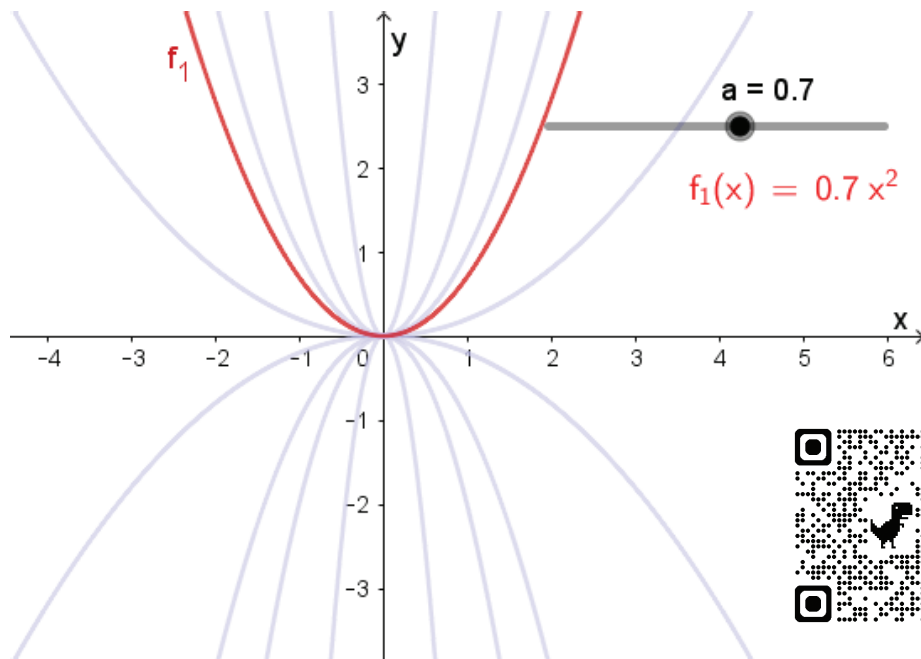
- Sa më e madhe është vlera absolute e koeficientit të katrorit, aq më shpejtë rritet mënjanimi i parabolës (d.m.th., koeficienti i drejtimit të tangjentës te pikëprerja e funksionit). “Degët” e parabolës janë më afër deri te boshti y .

- Sa më e vogël është vlera absolute e koeficientit të katrorit, aq më ngadalë rritet mënjanimi i parabolës (d.m.th., koeficienti i drejtimit të tangjentës te pikëprerja e funksionit). “Degët” e parabolës janë më afër deri te boshti x .



Shembulli 4. Radhiti parabolat prej atyre ku mënjanimi ndryshon më ngadalë, deri tea to ku mënjanimi ndryshon më shpejt.

$$y = -3x^2, y = 2x^2, y = -\frac{1}{2}x^2, y = \frac{1}{5}x^2.$$



<https://www.geogebra.org/m/zn3xmeuh>

Detyra për ushtrime:

1. Të skicohet grafiku i funksionit me caktimin e koordinatave të kulmit, pikëprerjet me bosh-tet e koordinatave dhe caktimi edhe çfarëdo pikë e cila i takon funksionit.

a) $y = x^2 + 2x$ b) $y = x^2 - 6x + 5$ c) $y = x^2 - 4$

Vërejtje: Për vizatimin e drejtë të grafikut të funksionit katror është e nevojshme të caktojmë 5 pika, prej të cilave njëra është kulmi, ndërsa të tjerat dy çifte janë pika simetrike në boshtin e simetrisë së parabolës.

2. Është dhënë funksioni $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

a) Gjeje fushën e përkufizimit të funksionit

b) Gjeji zerot e funksionit

c) Njehso maksimumin e funksionit dhe cakto koordinatat e kulmit të parabolës

ç) Cakto bashkësinë e vlerave të funksionit

d) Gjeji intervalet e monotonies së funksionit

dh) Skico grafikun e funksionit. Mund të shfrytëzosh Geogebra për paraqitje vizuele të funksionit dhe të gjitha pikat e tij.

3. Gjeje funksion katror $f(x) = ax^2 + c$ nëse $f(0) = 1$ dhe $f(1) = 2$.

4. Gjeje funksion katror $f(x) = ax^2 + bx + c$ nëse janë dhënë tri pika prej grafikut të tij: $A(1,-1)$, $B(0,1)$ dhe $C(-1,5)$.

Skico grafikun e funksionit. Mund të shfrytëzosh Geogebra për paraqitje vizuele të funksionit të grafikut të funksionit që shtrihen tek i njëjti.

4. FUNSIONI I FUQISË

4.1 FUNKSIONI I FUQISË ME EKSPONENT NATYROR

Funksioni $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ quhet funksion fuqi me eksponent natyror.

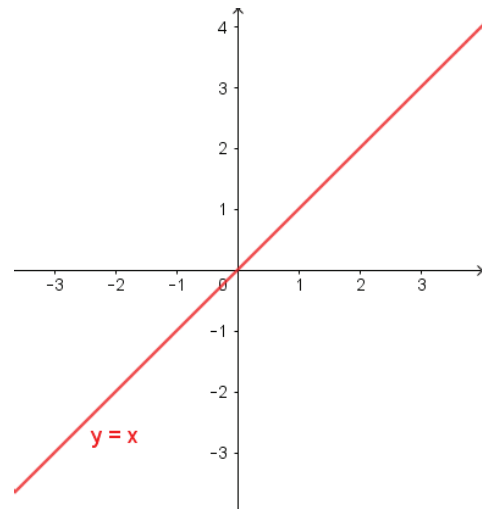
Do të shqyrtojmë disa raste speciale.

1) Për $n = 1$, fitohet funksioni $f(x) = x$. Ky është funksion linear $f(x) = ax + b$ me $a = 1$ dhe $b = 0$.

Grafiku është drejtëz që kalon nëpër fillimin e koordinatave $(0,0)$

$$D_f = \mathbb{R} \text{ dhe } V_f = \mathbb{R}.$$

Funksioni monotonisht rritet në të gjithë fushën e përkufizimit.



2) Për $n = 2$, fitohet funksioni $f(x) = x^2$. Ky është funksion $f(x) = ax^2 + bx + c$ katror $a = 1$, $b = 0$ dhe $c = 0$.

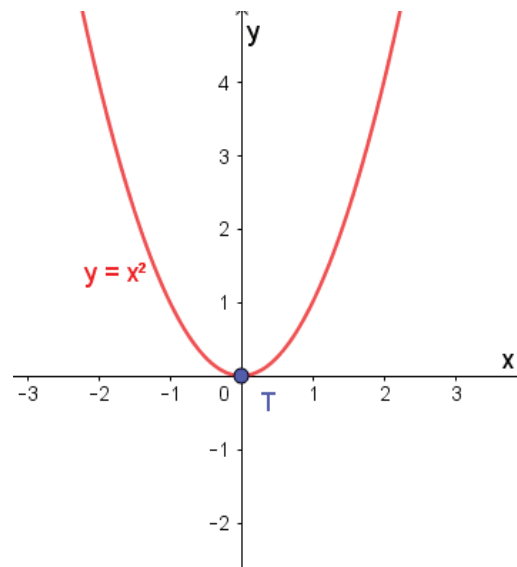
Grafiku i funksionit është parabolë që ka kulmin $T(0,0)$.

$$D_f = \mathbb{R} \text{ dhe } V_f = [0, +\infty).$$

Funksioni monotonisht zvogëlohet në intervalin $(-\infty, 0)$ dhe monotonisht rritet në intervalin $(0, +\infty)$.

Parabola është kthyer me hapje lartë dhe ka minimum te kulmi $T(0,0)$ d.m.th., për $x = 0$, $y_{\min} = 0$.

Boshti y është boshti i simetrisë.



3) Për $n = 3$, fitohet funksioni $f(x) = x^3$. Ky funksion i ka këto veti:

Grafiku i funksionit është lakore e cila quhet parabola kubike,

$$D_f = R \text{ dhe } V_f = R.$$

Për $n = 3, 5, 7, 9, \dots$ fitohen lakore të ngjashme vetëm me pjerrtësi të ndryshme.

Funksionet janë monotone rritëse në të gjithë fushën e përkufizimit.

Pikëprerjet me boshtet x dhe y është pika $(0, 0)$.

Grafikët e të gjithë funksioneve kalojnë nëpër pikat $(-1, 1)$ dhe $(1, 1)$.

$$f(x) = x^3$$

$$g(x) = x^5$$

$$h(x) = x^7$$

$$p(x) = x^9$$

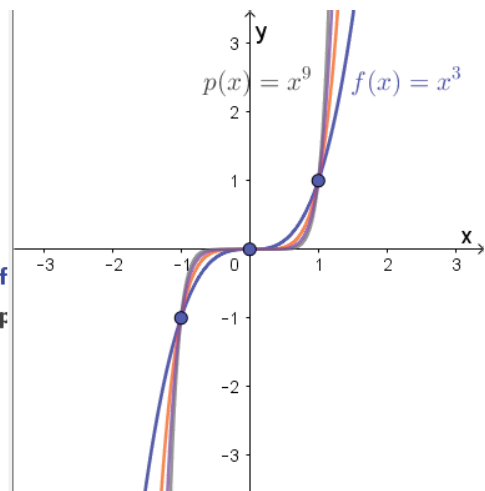
$$A = (0, 0)$$

$$B = (1, 1)$$

$$C = (-1, -1)$$

$$\text{текст1} = "f"$$

$$\text{текст2} = "f"$$



4) Për $n = 4, 6, 8, \dots$ fitohen funksionet $g(x) = x^4$, $h(x) = x^6$, $p(x) = x^8 \dots$ për të cilët vlejné vetitë e njëjta sikurse edhe për funksionin katror $f(x) = x^2$.

$$D_f = R \text{ dhe } V_f = [0, +\infty).$$

Funksionet zvogëlohen në intervalin $(-\infty, 0)$ dhe monotonisht rriten në intervalin prej $(0, +\infty)$.

Lakoret janë të kthyer me hapje lartë dhe kanë minimum te kulmi $(0, 0)$ d.m.th., për $x = 0$, $y_{\min} = 0$.

Boshti y është boshti i simetrisë.

Të gjitha funksionet kalojnë nëpër pikat $(-1, 1)$ – dhe $(1, 1)$

$$T = (0, 0)$$

$$f: y = x^2$$

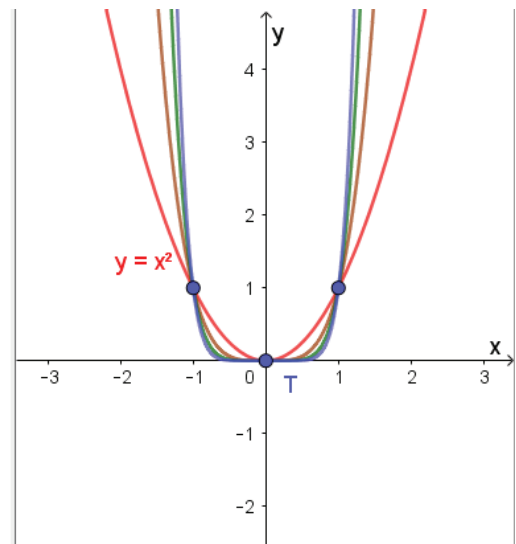
$$g: y = x^4$$

$$h: y = x^6$$

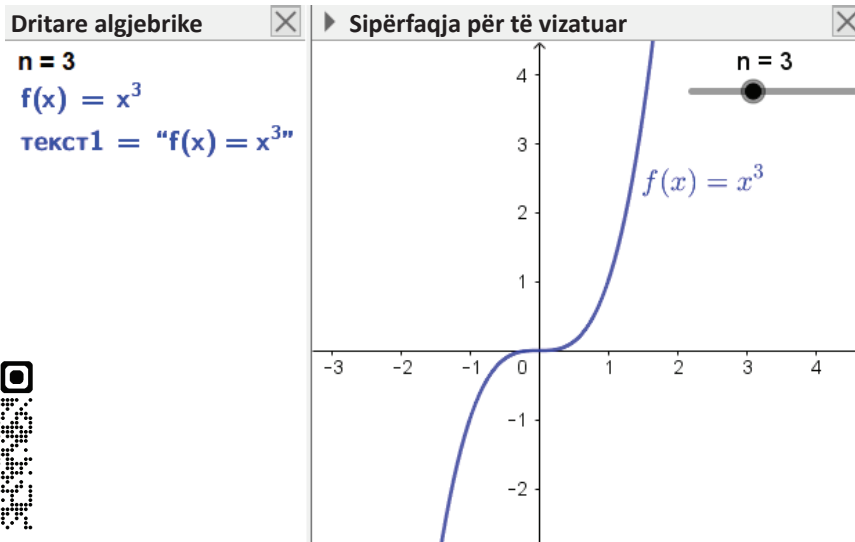
$$p: y = x^8$$

$$A = (1, 1)$$

$$B = (-1, 1)$$



Për të shqyrtuar vetitë që vlejné për funksionet e fuqisë me eksponent numër natyror mund të shfrytëzohen apletet te të cilës do të ndryshon vlera e eksponentit n me rrëshqitësin.



<https://www.geogebra.org/m/ekuwfbd8>

Shembulli 1. Të skicohet grafiku i funksioneve a) $f(x) = x^4$, b) $g(x) = x^5$ me caktimin e disa pikave karakteristike.

Zgjidhje: a) Për funksionin $f(x) = x^4$, caktoi të gjitha vlerat e funksionit për $x \in \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}$, ndërsa pastaj skico grafikun.

b) Për funksionin $g(x) = x^5$ cakto vlerën e funksionit për $x \in \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}$, ndërsa pastaj skico grafikun.

Shfrytëzoje apletin paraprak për paraqitje vizuele të funksioneve në Geogebër.

4.2. FUNKSIONI I FUQISË ME EKSPONENT NUMËR RACIONAL

Nëse e zgjerojmë bashkësinë e vlerave të lejuara të n të jetë në bashkësinë e numrave racionalë dhe shkruajmë q për eksponent, atëherë kemi funksion të fuqisë $f(x) = x^q$ me eksponent racional $Q \in q$.

Do të shqyrtojmë disa karakteristika të funksioneve të fuqisë me eksponent numër racional $q \in \left\{-1, -2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$

1) Për $q = -1$ fitohet funksioni $f(x) = x^{-1}$ d.m.th., $f(x) = \frac{1}{x}$. Për funksionin vlejnjë këto veti:

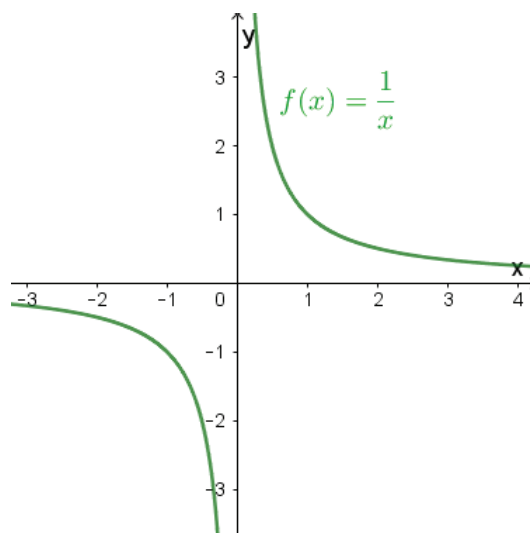
$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ dhe } V_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Funksioni monotonisht zvogëlohet në intervalet $(-\infty, 0)$ dhe prej $(0, +\infty)$.

Nuk ka vlera ekstreme.

Boshtet x dhe y nuk i prejnë.

Funksion i kalon nëpër pikat $(-1, -1)$ dhe $(1, 1)$.



2) Për $q = -2$ fitohet funksioni $f(x) = x^{-2}$ d.m.th., $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Për funksionin vlejnjë këto veti:

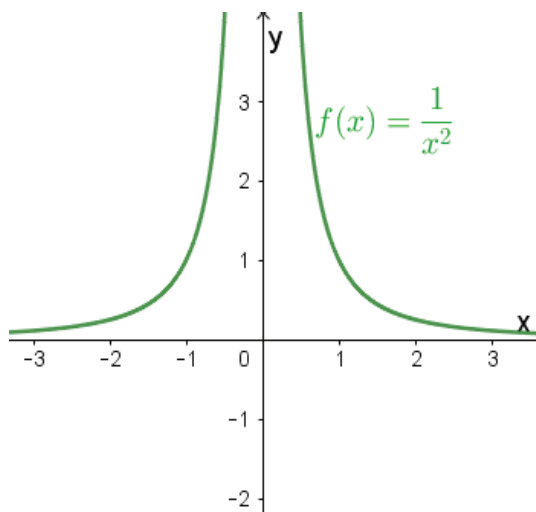
$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ dhe } V_f = (0, +\infty).$$

Funksioni monotonisht rritet në intervalin $(-\infty, 0)$ dhe monotonisht zvogëlohet në intervalin $(0, +\infty)$.

Funksioni nuk ka vlera ekstreme.

Funksioni nuk i pren boshtet x dhe y .

Funksion i kalon nëpër pikat $(-1, 1)$ dhe $(1, 1)$.



3) Për $q = \frac{1}{2}$ fitohet funksioni $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ d.m.th., $f(x) = \sqrt{x}$.

Për funksionin vlej në këto veti:

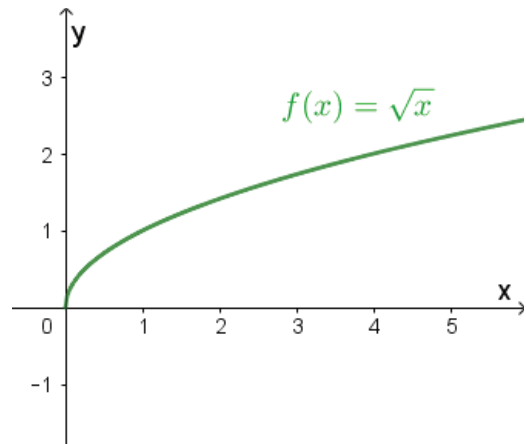
$$D_f = [0, +\infty) \text{ dhe } V_f = [0, +\infty).$$

Funksioni monotonisht rritet në të gjithë fushën e përkufizimit.

Vlerë minimale ka në pikën $(0,0)$.

Boshtet x dhe y i pren në pikën $(0,0)$.

Funksioni kalon nëpër pikën $(1,1)$.



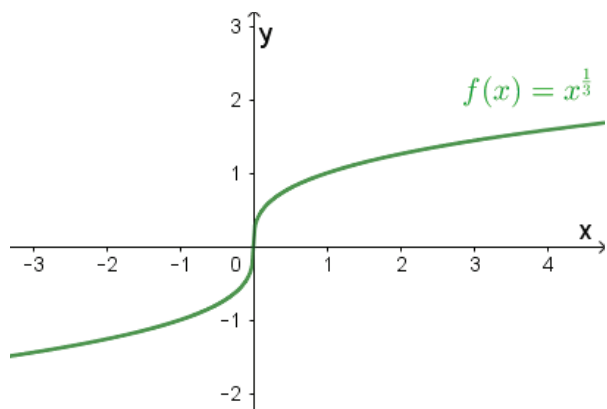
4) Për $q = \frac{1}{3}$ fitohet funksioni $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ d.m.th., $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Për funksionin vlej në këto veti:

$$D_f = \mathbb{R} \text{ dhe } V_f = \mathbb{R}$$

Funksioni monotonisht rritet në të gjithë fushën e përkufizimit.

Boshtet x dhe y i pren në pikën $(0,0)$.

Funksion i kalon nëpër pikat $(-1,1)$ dhe $(1,1)$.



T'i shqyrtojmë rastet e përgjithshme për funksionin fuqi me eksponent numër racional. Do të shqyrtojmë në veçanti eksponenti të jetë numër negative ose numër racional $q = \frac{a}{b}$, ku a, b janë numra reciprokisht të thjeshtë dhe $b \neq \{0,1\}$.

1) Eksponenti q le të jetë numër negativ:

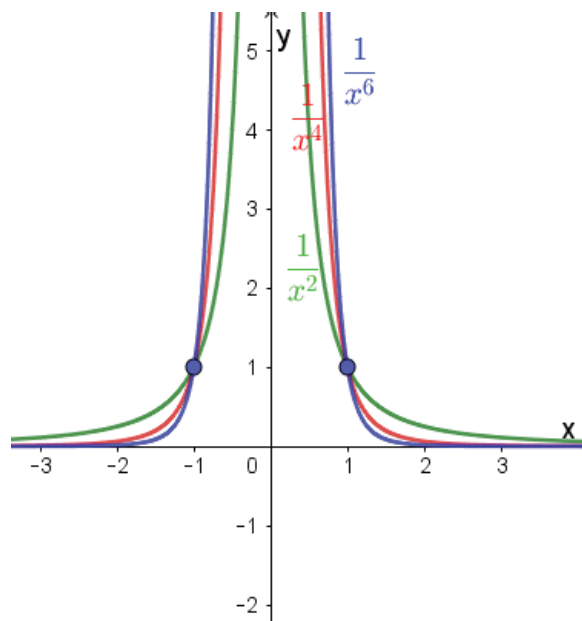
1 a) Nëse $q = -2n$, atëherë $f(x) = x^{-2n} = \frac{1}{x^{2n}}$ për $n \in \mathbb{N}$.

Vetitë të cilat vlejnjë për funksionet janë:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ dhe } V_f = (0, +\infty)$$

Funksioni monotonisht rrit në intervalin $(-\infty, 0)$ dhe monotonisht zvogëlohet në intervalin $(0, +\infty)$.

Funksioni nuk ka vlera ekstreme, ndërsa nuk i pren boshtet x dhe y . Funksioni kalon nëpër pikat $(-1, 1)$ dhe $(1, 1)$.



1 b) Nëse $q = -(2n-1)$ atëherë

$$f(x) = x^{-(2n-1)} = \frac{1}{x^{2n-1}} \text{ për } n \in \mathbb{N}.$$

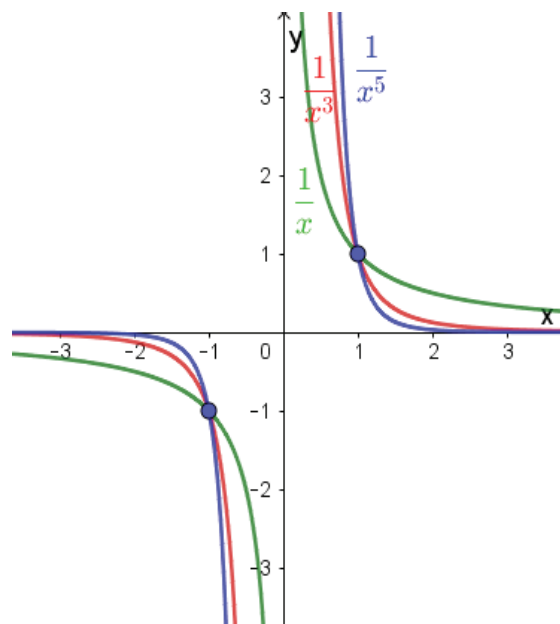
Vetitë të cilat vlejnjë për funksionin janë:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ dhe } V_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Funksioni monotonisht zvogëlohet në intervalin $(-\infty, 0)$ dhe prej $(0, +\infty)$.

Funksioni nuk ka vlerë ekstreme dhe nuk i pren boshte x dhe y .

Funksioni kalon nëpër pikat $(-1, -1)$ dhe $(1, 1)$.



2) Eksponenti q le të jetë numër racional $q = \frac{a}{b}$, ku a, b janë numra reciprokisht të thjeshtë dhe $b \neq \{0, 1\}$.

Vërejtje: Te shembujt vlera e a është numër tek pozitiv.

2 a) Nëse b është numër çift, atëherë

$$f(x) = x^{\frac{a}{b}} = \sqrt[b]{x^a}.$$

Vetitë të cilat vlejné për funksionin janë:

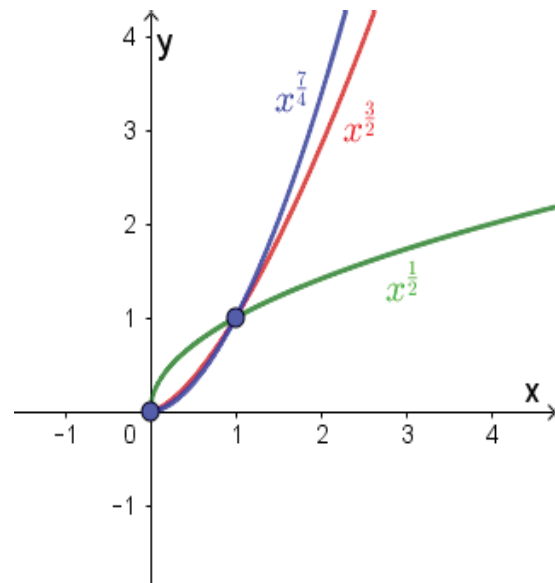
$$D_f = [0, +\infty) \text{ dhe } V_f = [0, +\infty)$$

Funksioni monotonisht rritet në të gjithë fushën e përkufizimit.

Vlerë minimale ka në pikën $(0,0)$.

Funksioni i pren boshtet x dhe y dhe kalon nëpër pikën $(0,0)$.

Funksioni kalon nëpër pikën $(1,1)$.



2 b) Nëse b është numër tek, atëherë

$$f(x) = x^{\frac{a}{b}} = \sqrt[b]{x^a}.$$

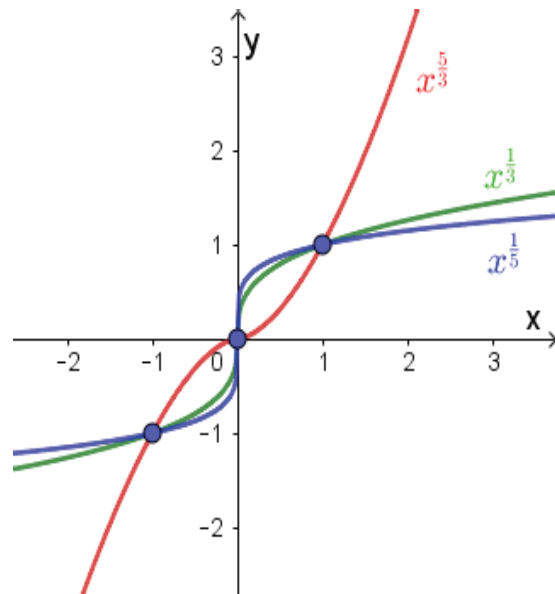
Vetitë të cilat vlejné për funksionet janë:

$$D_f = R \text{ dhe } V_f = R$$

Funksioni monotonisht rritet në të gjithë fushën e përkufizimit.

Boshtet x dhe y i pren në pikën $(0,0)$.

Funksioni kalon nëpër pikat $(-1,-1)$ dhe $(1,1)$.



Detyra për ushtrime:

Vizato grafikun e funksioneve dhe shkruaj vetitë e tyre:

1. a) $y = x^6$ b) $y = x^{-4}$

2. a) $y = \sqrt[3]{x}$ b) $y = \sqrt[4]{x}$

3. Është dhënë funksioni $y = x^{\frac{1}{6}}$.

a) Gjeje fushën e përkufizimit të funksionit

b) Vallë funksioni ka zero?

c) Cakto bashkësinë e vlerave të funksionit

ç) Vallë funksioni është i kufizuar

d) Vizato grafikun e funksionit.

4. Është dhënë funksioni $y = x^{-3}$.

a) Gjeje fushën e përkufizimit të funksionit

b) Vallë funksioni ka zero?

c) Cakto bashkësinë e vlerave të funksionit

ç) Vallë funksioni është i kufizuar?

d) Vizato grafikun e funksionit. Mund të shfrytëzosh edhe Geogebra për paraqitje vizuale të funksionit

5. FUNKSIONI EKSPONENCIAL

Funksioni $f(x) = a^x$ për $a \neq 1, a > 0$ quhet funksion eksponencial. Funksioni i ka këto veti:

$$D_f = \mathbb{R} \text{ dhe } V_f = (0, +\infty).$$

$(0,1)$ është pikëprerja me boshti y .

Nuk ka minimum dhe maksimum.

Për $a > 0$ funksioni monotonisht rritet në të gjithë fushën e përkufizimit, ndërsa për $0 < a < 1$ funksioni monotonisht zvogëlohet në të gjithë fushën e përkufizimit.

Funksioni është i kufizuar prej poshtë d.m.th., $f(x) > 0$.

Funksioni nuk ka zero.

Shembulli 1. Të skicohen grafikët e funksioneve:

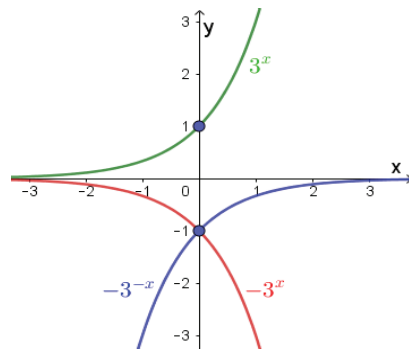
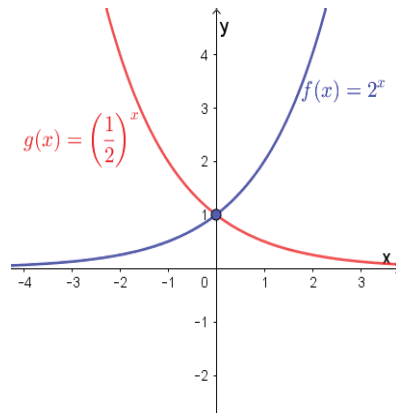
a) $y = 3^x, y = -3^x, y = -3^{-x}$

b) $y = 2^x, y = 2^x - 1, y = 2^{x+2} - 1$

Zgjidhje:

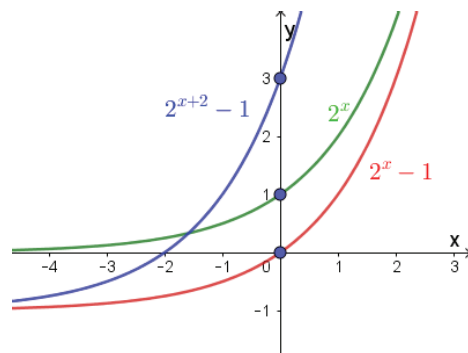
Grafikët e funksioneve eksponenciale $y = 3^x, y = -3^x, y = -3^{-x}$ janë dhënë te figura.

Cilat veti vlejné për funksionet?



Grafikët e funksioneve eksponenciale $y = 2^x, y = 2^x - 1, y = 2^{x+2} - 1$ janë dhënë te figura.

Cilat veti vlejné për funksionet?



Detyra për ushtrime:

Vizato grafikun e funksioneve:

1. a) $y = 4^x$ b) $y = 3^x$

2. a) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ b) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

3. Është dhënë funksioni $y = a^x$.

a) Cilat vlera mund t'i ketë baza a ?

b) Gjeje domenin dhe kodoemnin e funksionit.

c) Vallë funksioni është i kufizuar?

ç) Cakto monotoninë e funksionit varësisht prej a .

d) Vallë funksioni ka zero?

4. Gjeje funksionin $f(x) = a^x$ nëse kalon nëpër pikën $A(1,2)$. Skico grafikun e funksionit. Mund të shfrytëzosh Geogebra për paraqitje vizuele të funksionit dhe pika nëpër të cilën kalon funksioni.

6. FUNKSIONI LOGARITMIK

Funksioni $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ quhet funksion logaritmik.

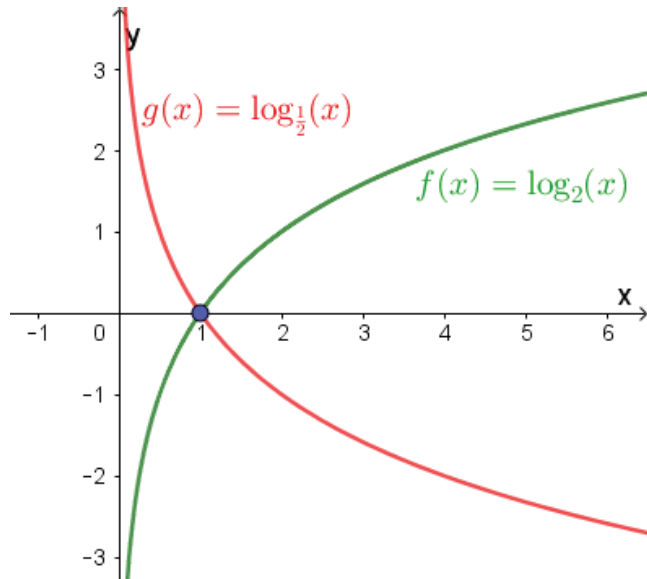
Funksioni i ka këto veti:

$$D_f = (0, +\infty) \text{ dhe } V_f = \mathbb{R}$$

Funksioni nuk ka maksimum dhe minimum.

$x = 1$ është zero e funksionit, d.m.th., pikëprerja me boshtin x është pika $(1, 0)$.

Për $a > 1$ funksioni monotonisht rritet në të gjithë fushën e përkufizimit, ndërsa për $0 < a < 1$ monotonisht zvogëlohet në të gjithë fushën e përkufizimit.



Shembulli 1. Të skicohen grafikët e funksioneve:

a) $y = \log_2 x$, $x > 0$; b) $y = \log_2 \frac{1}{x}$, $x > 0$; c) $y = \log_2(-x)$, $x < 0$

Zgjidhje:

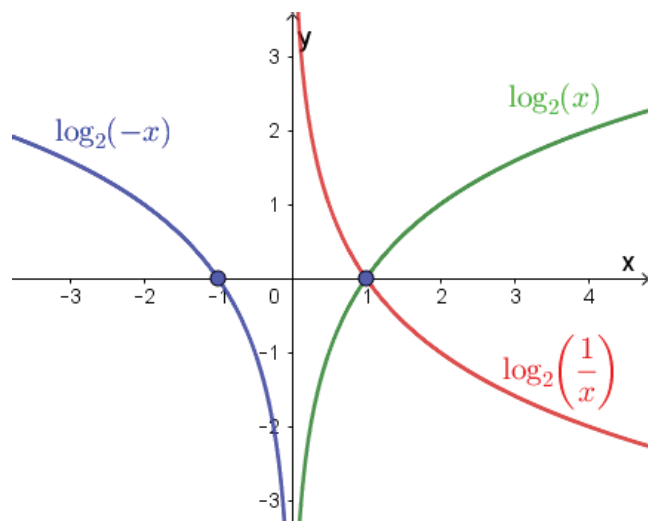
Grafikët e funksioneve logaritmike:

$$y = \log_2 x, x > 0,$$

$$y = \log_2 \frac{1}{x}, x > 0, \text{ dhe } y = \log_2(-x), x < 0$$

janë dhënë te figura.

Cilat veti vlejnë për funksionet?



Detyra për ushtrime:

Vizato grafikun e funksioneve :

1. a) $y = \log_3 x$ b) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

2. a) $y = -2 + \log_2 x$ b) $y = \log_2 (x-1)$

3. Është dhënë funksioni $y = \log_a x$.

a) Cilat vlera mund t'i ketë baza a ?

b) Gjeje domenin dhe kodoemnin e funksionit.

c) Vallë funksioni është i kufizuar?

ç) Cakto monotoninë e funksionit varësisht prej a ..

d) Vallë funksioni ka zero?

4. Gjeje funksionin $f(x) = \log_a x$ nëse kalon nëpër pikën $A(4,2)$. Skico grafikun e funksionit. Mund të shfrytëzosh Geogebra për paraqitje vizuele të funksionit dhe pika nëpër të cilën kalon funksioni.

7. KONCEPTI PËR FUNKSION INVERS

Te sistemi i njëjtë koordinativ t'i paraqesim funksionet $y = 2^x$ dhe $y = \log_2 x$.

Çka mund të vërehet te funksionet?

Për funksionin eksponencial $y = 2^x$,

fusha e përkufizimit

$$D_f = \mathbb{R} \text{ dhe } V_f = (0, +\infty).$$

Për funksionin logaritmik $y = \log_2 x$,

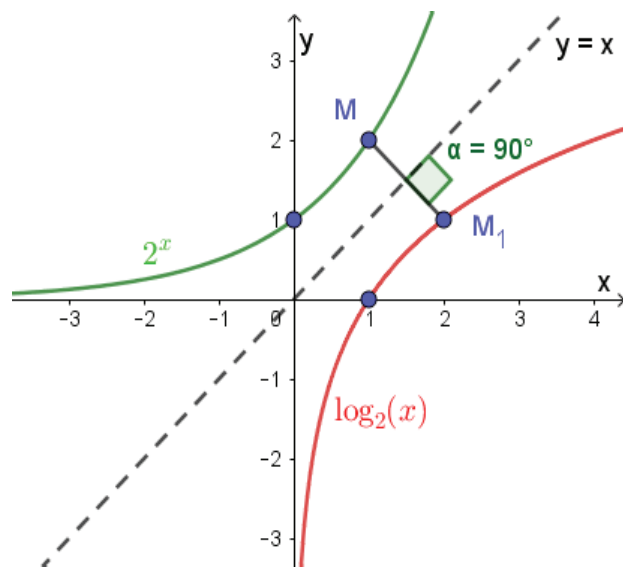
fusha e përkufizimit $D_f = (0, +\infty)$ dhe

$$V_f = \mathbb{R}.$$

Grafikët e të dy funksioneve kanë formë të njëjtë dhe janë simetrike në lidhje me drejtëzën $y = x$, simetralja e kuadrantit të parë dhe të tretë.

Nëse pika $M(a, b)$ i takon grafikut të funksionit $y = 2^x$, atëherë pika $M_1(a, b)$ i takon grafikut të funksionit $y = \log_2 x$.

Funksionet $y = 2^x$ dhe $y = \log_2 x$ janë inverse njera në tjetrën.



Nëse është dhënë funksioni f me fushën e përkufizimit D_f dhe bashkësia e vlerave V_f parashtrohet pyetja a ekziston dhe si të caktohet funksioni g me fushën e përkufizimit $D_g = V_f$ dhe bashkësia e vlerave $V_g = D_f$ ashtu që të ketë veprim të anasjelltë, d.m.th., $g(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$ për çdo $x \in D_f$ dhe $y \in V_f$.

Funksioni g që i kënaq kërkesat paraprake quhet funksion invers i funksionit f .

Përkufizimi. Funksioni $f: X \rightarrow Y$ le të jetë i atillë që çdo element prej Y është pasqyrë prej X , d.m.th., $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Atëherë funksioni $f^{-1}: Y \rightarrow X$ i përkufizuar me $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$ quhet **funksion invers** i funksionit $f(x)$.

Fusha e përkufizimit të funksionit invers $f^{-1}(x)$ është e barabartë me bashkësinë e vlerës së funksionit $f(x)$ d.m.th., $D_{f^{-1}} = V_f$.

Vërejtje: Shënimi f^{-1} nuk do të thotë $\frac{1}{f}$.

Shembulli 1. Të caktohet funksioni invers i funksionit $f(x) = \frac{x}{2x+1}$.

Zgjidhje: Ke të zëvendësojmë $f(x)$ me y . Kemi $y = \frac{x}{2x+1}$.

Ta shprehim x , së pari shumëzojmë me $2x+1$ dhe fitojmë

$$y(2x+1) = x$$

$$2xy + y = x$$

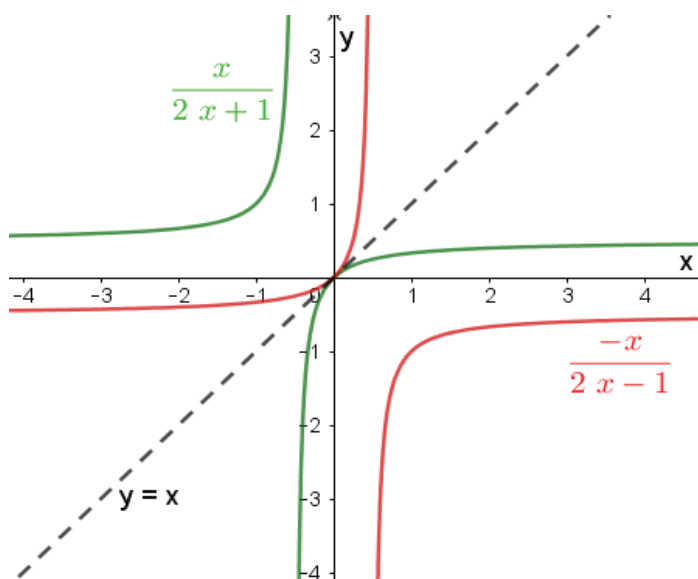
$$2xy - x = -y$$

$$x(2y-1) = -y$$

$$x = -\frac{y}{2y-1}$$

Domethënë funksioni invers është $f^{-1}(x) = -\frac{x}{2x-1}$.

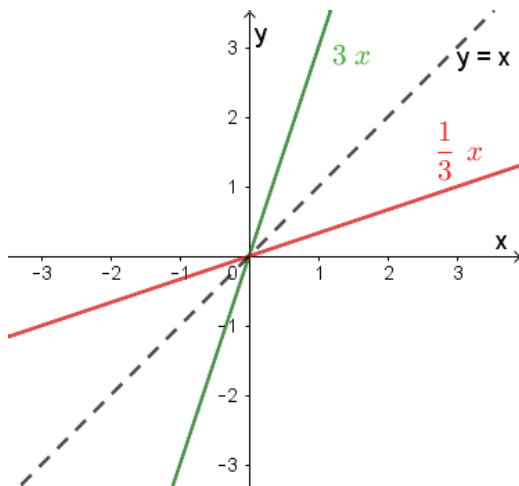
Vërejtje: Grafikët e funksionit dhe funksionit të tij invers janë simetrik në lidhje me drejtëzën.



Shembulli 2. Shembuj të funksioneve inverse dhe grafikët e tyre

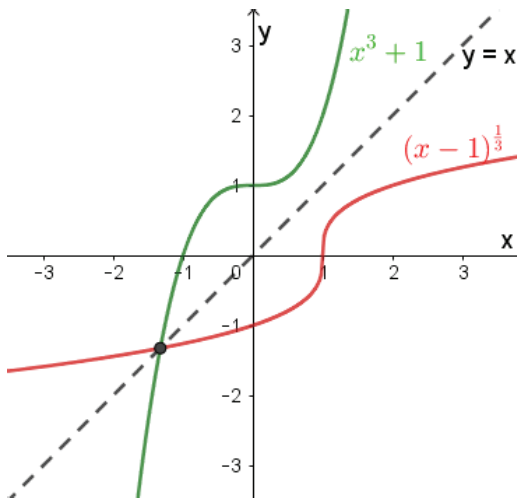
a) $y = 3x$ dhe $y = \frac{1}{3}x$

Cilat veti vlejné për funksionet?



b) $y = x^3 + 1$ dhe $y = \sqrt[3]{x-1}$

Cilat veti vlejné për funksionet?



Detyra për ushtrime:

Gjeje funksion invers të funksioneve:

1. a) $y = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}x$ b) $y = \frac{2x+1}{x-2}$

2. a) $y = \sqrt[3]{x} + 1$ b) $y = 10^{x-2} + 3$

3. Vërteto se funksionet janë inverse njëra në tjetrën.

a) $y = \frac{1}{x}$ b) $y = \frac{1-x}{1+x}$

4. Për cilat vlera të a dhe b funksioni linear $y = ax + b$, ($a \neq 0$), do të jetë inverse në vetvete? Në Geogebra konstrukto funksion linear me vlera të parametrave të cilët fitohen me rrëshqitës. Në mënyrë vizuale paraqite zgjidhjen.

5. Cakto funksionet inverse f^{-1} të funksioneve:

a) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ b) $f(x) = \sqrt{x+1}$

c) $f(x) = 2^x - 1$

ç) $f(x) = 1 + \ln(x+2)$

d) $f(x) = \frac{2-x}{2+x}$

8. FUNKSIONET TRIGONOMETRIKE THEMELORE

Së pari të përkujtohem në një veti që vlen për funksionet.

Përkufizimi. Për funksionin $f(x)$, të përkufizuar në bashkësinë D_f themi se është **periodik** nëse ekziston numër real $T \neq 0$ ashtu që të vlen:

1) Për çdo $x \in D_f$ dhe $x \pm T \in D_f$,

2) $f(x+T) = f(x)$

Numri T që i kënaq kushtet e quajmë **periodë** të funksionit.

Përkufizimi. Funksioni $f(x)$ le të jetë përkufizuar në bashkësinë D_f është periodik Numri më i vogël pozitiv T për të cilin vlen $f(x+T) = f(x)$ për çdo $x \in D_f$ quhet **perioda themelore** e funksionit $f(x)$.

Funksionet: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ quhen funksione trigonometrike. T'i paraqesim grafikët e tyre dhe shkruajmë vetitë themelore.

1) $f(x) = \sin x$

$D_f = \mathbb{R}$ dhe $V_f = [-1, 1]$

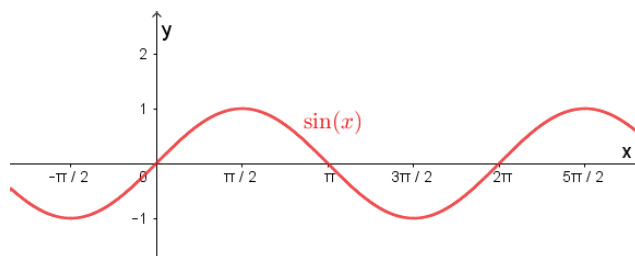
Funksioni është i kufizuar.

Funksioni është periodik me periode themelore $T = 2\pi$.

Numrat $x_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ janë zerot e funksionit d.m.th., grafiku i funksionit e pren boshtin x në pikat $(k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Funksioni monotonisht rritet në intervalin prej -1 deri 1 në çdonjërin prej intervaleve $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, ndërsa monotonisht zvogëlohet prej 1 deri -1 në çdonjërin prej intervaleve .

Grafiku i funksionit quhet **sinusoida**.

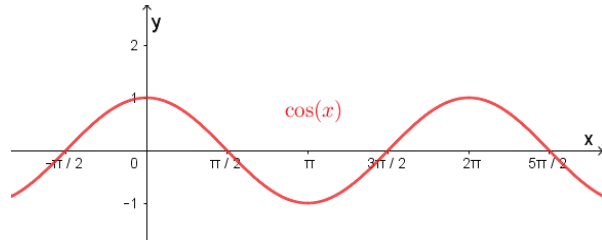


2) $f(x) = \cos x$

$$D_f = R \text{ dhe } V_f = [-1, 1]$$

Funksioni është i kufizuar.

Funksioni është periodik me periode themelore $T = 2\pi$.



Numrat $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$ janë zerot e funksionit d.m.th., grafiku i funksionit e pren boshtin x në pikat $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0\right)$, $k \in Z$.

Funksioni monotonisht rritet -1 deri 1 në intervalin $((2k-1)\pi, 2k\pi)$, $k \in Z$, ndërsa monotonisht zvogëlohet në intervalin $(2k\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in Z$.

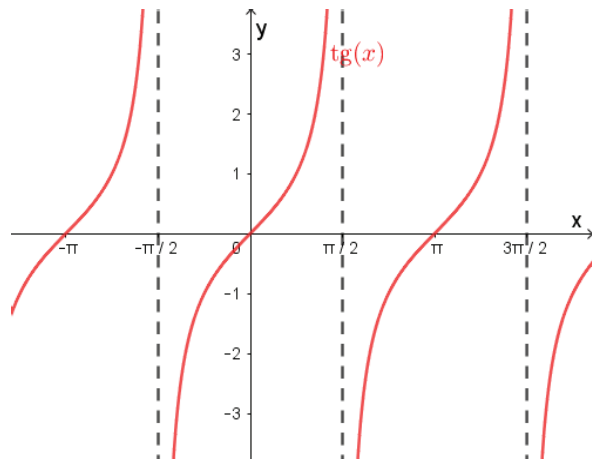
Grafiku i funksionit quhet **kosinusoidë**.

3) $f(x) = \operatorname{tg} x$

$$D_f = R \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in Z \right\} \text{ dhe } V_f = R$$

Funksioni është i pakufizuar.

Funksioni është periodik me periode themelore $T = \pi$.



Numrat $x_k = k\pi$, $k \in Z$ janë zerot e funksionit, d.m.th., grafiku i funksionit e pren boshtin x në pikat $(k\pi, 0)$, $k \in Z$.

Funksion i monotonisht rritet prej $-\infty$ deri $+\infty$ në çdonjërin prej intervaleve

$$\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right), k \in Z.$$

Grafiku i funksionit quhet **tangensoidë**.

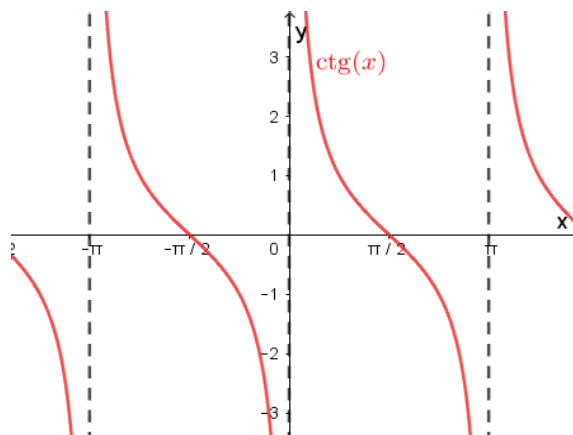
4) $f(x) = \operatorname{ctg} x$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \text{ dhe}$$

$$V_f = \mathbb{R}$$

Funksioni është i pakufizuar.

Funksioni është periodik me periodën themelore $T = \pi$.



Numrat $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ janë zerot e funksionit d.m.th., grafiku i funksionit e pren

boshtin x në pikat $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Funksion i monotonisht zvogëlohet prej $+\infty$ deri $-\infty$ në çdonjërin prej intervaleve $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Grafiku i funksionit quhet **kotangensoidë**.

Detyra për ushtrime:

1. Vizato grafikun e funksioneve:

a) $y = 2 \sin x$ b) $y = \cos x + 2$

2. Kontrolllo a janë periodike funksionet:

a) $y = 1 + \sin x$ b) $y = \cos x - 2$ c) $y = -\operatorname{tg} x - 3$

3. Cilat prej këtyre funksioneve janë çift, cilat janë tek, ndërsa cilat janë as çift as tek:

a) $y = 3x^2 + \cos x$ b) $y = 2 \sin x - 3x$ c) $y = \sin x + 2 \cos x$

4.

a) Për cilin funksion themi se është joperiodik?

b) Për cilën periode themi se është periode themelore?

DETYRA PËR PËRSËRITJE DHE ZBATIM PRAKTIK:

1. Cakto bashkësinë e përkufizimit të funksioneve:

a) $f(x) = x^5 - 3x + 7$ b) $f(x) = \frac{2x+5}{x^2+3x-4}$ c) $y = 5\lg(4-x^2)$

2. Cakto zerot e funksioneve:

a) $f(x) = \frac{x^4+1}{x^2+x+1}$ b) $y = x^4 - 2x^2 + 1$ c) $f(x) = \log(2x+1)$

3. Gjeje funksioni e formës $f(x) = ax + b$ nëse $f(0) = -2$ dhe $f(1) = 0$.

4. Shqyrto çiftin e funksioneve:

a) $f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$ b) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^4+1}$ c) $f(x) = x^2 - \cos x$

5. Cakto funksionin invers të funksioneve:

a) $y = \frac{2}{3} - \frac{3}{4}x$ b) $y = \frac{x+5}{2x-1}$
 c) $y = \sqrt[3]{x} - 2$ ç) $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

6. Funksioni f është dhënë me formulat $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$.

a) Cakto $f(-2)$, $f(0)$, $f(3)$

b) Cakto pikëprerjet me boshtin x dhe y ,

c) Vizato grafikun e funksionit dhe paraqiti pikat e fituara prej a) dhe b),

ç) Ku funksioni rritet?, ndërsa ku zvogëlohet?

d) Cilat vlera të funksionit f kur x është më i vogël se -1 ?

dh) Për cilën vlerë të x funksioni ka vlerë 1 ?

e) Për cilën vlerë x funksioni arrin vlerë më të vogël se -1 ?

7. Funkzioni f është dhënë me formulën $f(x) = -2x + 1$.

a) Cakto $f(-2)$, $f(0)$, $f(3)$

b) Cakto pikëprerjet me boshtin x ,

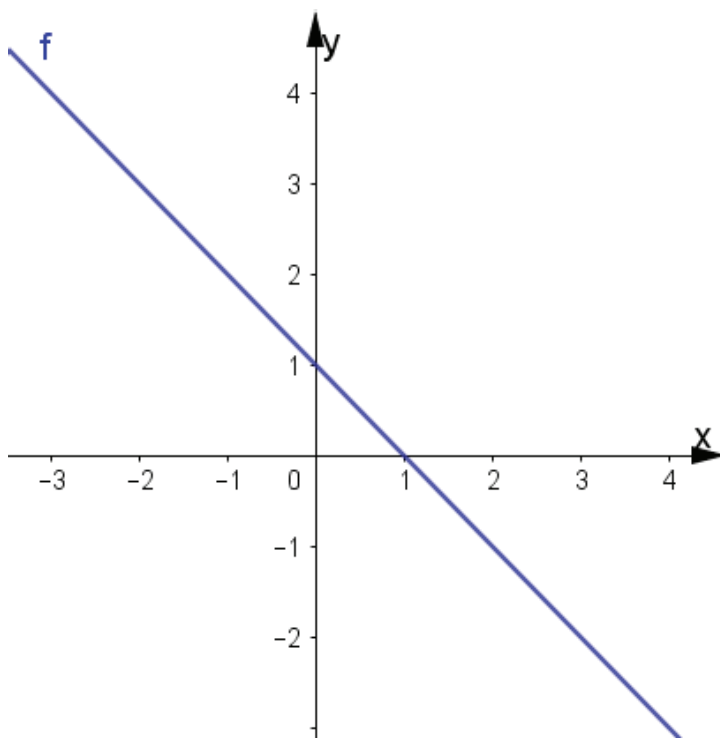
c) Vizato grafikun e funksionit dhe paraqiti pikat e fituara prej a) dhe b),

ç) Ku funksioni rritet? Pors u zvogëlohet?

d) Cilat janë vlerat e funksionit f kur x është më i madh se 3?

dh) Për cilën vlerë të x funksioni arrin vlerë më të vogël se -5?

8. Funkzioni është dhënë me grafikun



a) Vallë funksioni f te ndonjë pikë x ka vlerë më të madhe?, ndërsa a ka vlerë më të vogël?

b) Ku funksioni rritet?, ndërsa ku zvogëlohet?

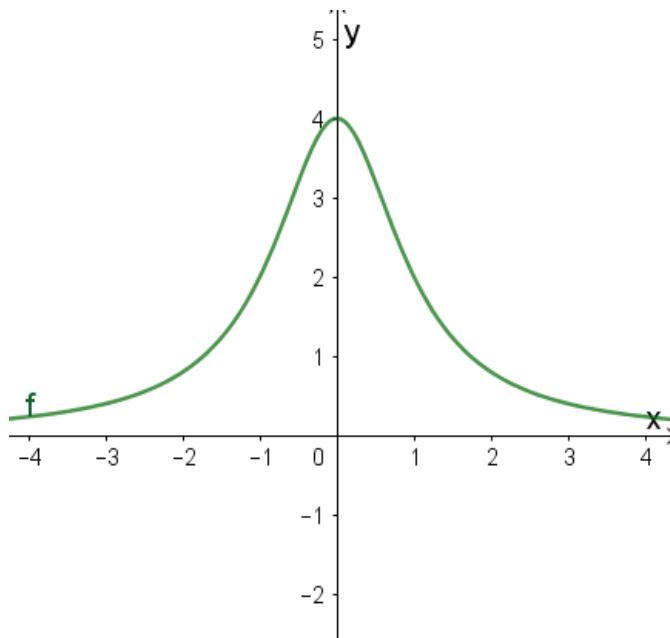
c) Cila është vlera e funksionit për $x = 2$?, ndërsa cila për $x = -1$?

ç) Cilat janë vlerat e funksionit f kur x është më i vogël se -2?

d) Për cilën vlerë të x funksioni ka vlerë -1?

dh) Për cilën vlerë të x funksioni arrin vlerë ndërmjet 1 dhe 5?

9. Funkzioni është dhënë me grafikun



a) Vallë funksioni f te ndonjë pikë x ka vlerë më të madhe?, ndërsa a ka vlerë më të vogël?

b) Ku funksioni rritet?, ndërsa ku zvogëlohet

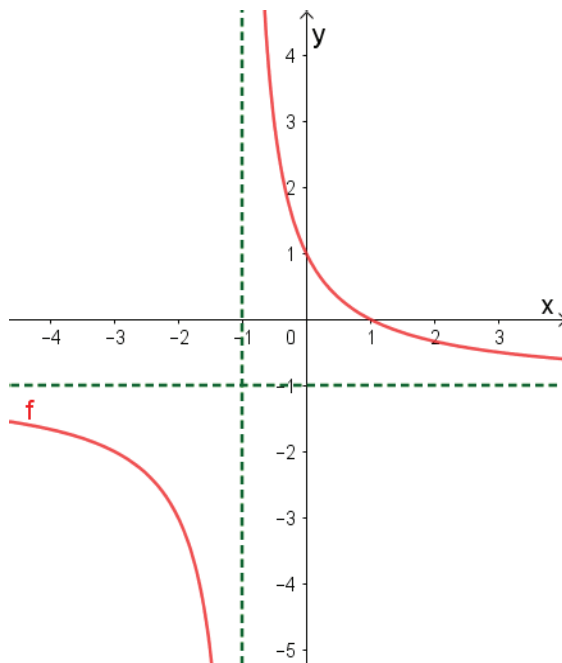
c) Cila është vlera e funksionit për $x = 2$?, ndërsa cila për $x = 0$?

ç) Cilat janë vlerat e funksionit f kur x është më i vogël se -1?

d) Për cilën vlerë të x funksioni ka vlerë -1?

dh) Për cilën vlerë të x funksioni arrin vlerë ndërmjet 0 dhe 2?

10. Funkzioni është dhënë me grafikun



a) Vallë funksioni f te ndonjë pikë x ka vlerë më të madhe?, ndërsa a ka vlerë më të vogël?

b) Ku funksioni rritet?, ndërsa ku zvogëlohet

c) Cila është vlera e funksionit për $x = 1$?, ndërsa cila për $x = 0$?

ç) Cilat janë vlerat e funksionit f kur x është më i vogël se -1?

d) Për cilën vlerë të x funksioni ka vlerë 1?

dh) Për cilën vlerë të x funksioni arrin vlera më të vogla se -1?

NJËSIA MODULARE 3

VLERA KUFITARE E FUNKSIONIT

Në këtë njësi modulare do të mësohen:

Vlera kufitare e funksionit

Vijueshmëria e funksionit te pika

Asimptotat e grafikut të funksionit

Kufijtë e funksioneve elementare

Asimptotat e grafikut të funksioneve reale elementare

Vlera kufitare speciale

VLERA KUFITARE E FUNKSIONIT**1. KONCEPTI PËR VLERË KUFITARE TË FUNKSIONIT*****Kufiri i funksionit***

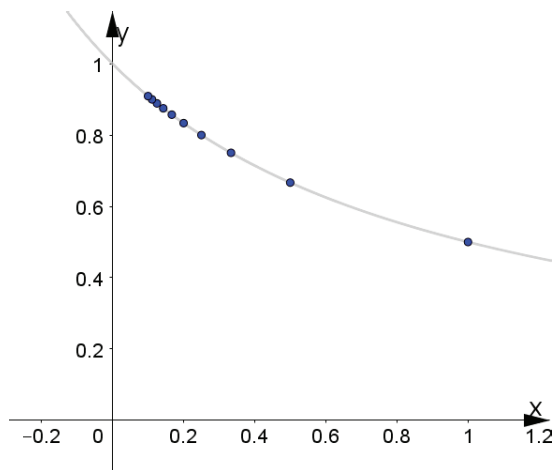
Është dhënë funksioni $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Argumenti x le të afrohet kah 0, nëpërmjet vargut me anëtarin e përgjithshëm $x_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Formojmë tabelë me vlera të vargut (x_n) dhe me vlera të funksionit $y_n = f(x_n) = f\left(\frac{1}{n}\right)$, për $n \in \mathbb{N}$.

x_n	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$	...
$f(x_n)$	0,5	0,667	0,75	0,8	0,833	0,857	0,875	0,889	0,9	0,909	...

Prej kësaj tablele vërehet se vargu (x_n) konvergjon kah 0, ndërsa vargu përkatës i funksionit ($f(x_n)$) konvergjon kah 1 (shiko figurën).



Nëse e caktojmë vlerën e vlerës absolute prej ndryshimit $|f(x_n) - 1|$, kemi:

$f(x_n)$	0,5	0,667	0,75	0,8	0,833	0,857	0,875	0,889	0,9	0,909	...
$ f(x_n) - 1 $	0,5	0,333	0,25	0,2	0,167	0,143	0,125	0,111	0,1	0,091	...

Mund të vërejmë se vlerat e ndryshimit $|f(x_n) - 1|$ tentojnë kah 0, kur vlerat e vargut (x_n) tentojnë kah 0.

Këtë mund ta konstatojmë dhe nëse marrim tjetër varg (x_n) që konvergjon kah 0, d.m.th., $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, atëherë vargu përkatës prej vlerave të funksionit tenton kah 1, d.m.th.,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n + 1} = 1.$$

Do të vërejmë se 1 është **vlera kufitare e funksionit te pika $x = 0$** , ndërsa do të shkruajmë $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$. (Lexohet: limes i funksionit $f(x)$ kur x tenton kah 0 është 1)

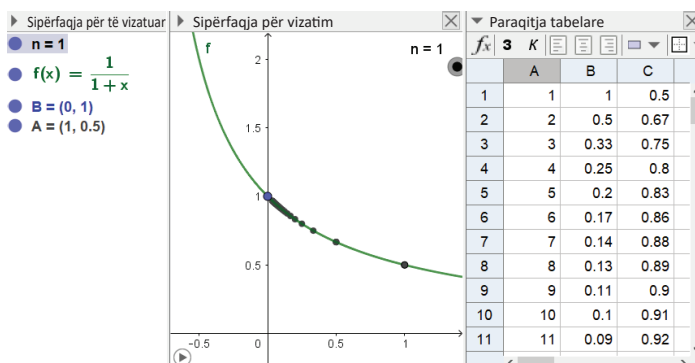
Përkufizimi 1: Funksioni $f(x)$ le të jetë përkufizuar në intervalin (a, b) që e përmban x_0 , eventualisht x_0 . Nëse për çdo varg të numrave realë (x_n) (për çdo $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in (a, b)$) që konvergjon kah x_0 ($\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$) vargu përkatës $(f(x_n))$ prej vlerave të funksionit është, varg konvergjent që konvergjon kah numri real A , $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$, atëherë themi se **kufiri i funksionit $f(x)$ kur x tenton kah x_0 është numri A** . Funksioni mund të mos jetë i përcaktuar në pikën x_0 . Shkruajmë $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

Për numrin real A themi se është **vlera kufitare ose kufiri (limes)** i funksionit $f(x)$ te pika x_0 . Koncepti vlera kufitare e funksionit mund të futet edhe me këtë përkufizim.

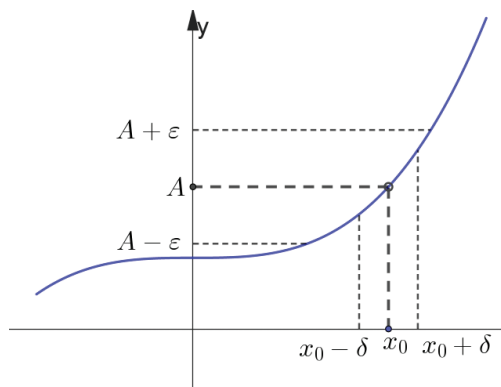
Përkufizimi 2: Për funksionin $f(x)$ themi se ka vlerë kufitare (ose limes) A , kur x tenton kah x_0 ($\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$) nëse për çdo $\varepsilon > 0$, ekziston $\delta > 0$, i atillë që për çdo $x \in D_f$ që e kënaq kushtin $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ është saktë $f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ d.m.th., $|x - x_0| < \delta$ vijon $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Të dy përkufizimet për vlerën kufitare janë ekuivalente. Vërtetimin e këtij gjykimi nuk do ta realizojmë. Interpretimi gjeometrik i përkufizimit 1 dhe përkufizimi 2 janë paraqitur te figurat dhe apletet.

Përkufizimi 1:



Përkufizimi 2:



Funksioni $y = f(x)$ le të jetë përcaktuar në bashkësinë $D_f \subseteq \mathbb{R}$ dhe le të jetë $x_0 \in \mathbb{R}$ pikë tek e cila funksioni $y = f(x)$ është përkufizuar te ndonjë rrethinë e x_0 , përveç në vet pikën.

Problemi i gjetjes së vlerës kufitare të funksionit te pika x ose rrethinës së saj është në realitet caktimi i sjelljes së vlerave të funksionit në rrethinën e pikës $f(x)$.

Shembulli 1. Le të jetë dhënë funksioni $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$. Fusha e përkufizimit të funksionit është $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Ta shqyrtojmë sjelljen e funksionit kur argument tenton kah $x_0 = 2 \in D_f$, d.m.th., ta caktojmë vlerën kufitare të funksionit.

Zgjidhje: Le të jetë (x_n) çfarëdo varg prej numrave realë, ashtu që $x_n \neq -1$, për çdo $n \in \mathbb{N}$ dhe $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$. Ta formojmë vargun përkatës prej vlerave të funksionit $(f(x_n))$ ku $f(x_n) = \frac{x_n-1}{x_n+1}$. Duke shfrytëzuar operacionet me vlerë kufitare të vargut, kemi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - 1}{x_n + 1} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n - 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + 1} = \frac{2 - 1}{2 + 1} = \frac{1}{3}.$$

Vijon, për çfarëdo varg (x_n) prej numrave realë, ashtu që $x_n \neq -1$, për çdo $n \in \mathbb{N}$ dhe $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$ dhe vargu përkatës prej vlerave të funksionit $(f(x_n))$ është konvergjent, me vlerë kufitare $\frac{1}{3}$ d.m.th. $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \frac{1}{3}$.

Shkruajmë $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{1}{3}$ dhe lexojmë $\frac{1}{3}$ është vlera kufitare e funksionit $f(x)$, kur x tenton kah 2.

Shembulli 2. Le të jetë dhënë funksioni $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$. Fusha e përkufizimit të funksionit është $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Ta shqyrtojmë sjelljen e funksionit kur argumenti tenton kah $x_0 = 1 \notin D_f$ d.m.th., ta caktojmë vlerën kufitare të funksionit.

Zgjidhje: Le të jetë (x_n) çfarëdo varg prej numrave realë, ashtu që $x_n \neq \pm 1$, për çdo $n \in \mathbb{N}$ dhe $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$. Ta formojmë vargun përkatës prej vlerave të funksionit $(f(x_n))$ ku $f(x_n) = \frac{x_n-1}{x_n^2-1}$. Duke shfrytëzuar operacionet me vlerë kufitare të vargut, kemi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n-1}{x_n^2-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n-1}{(x_n-1)(x_n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n+1} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + 1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Shkruajmë } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{2}.$$

Vërejtje: Te shembulli, edhe pse funksioni nuk është përcaktuar në pikën $x_0 = 1$, vlera kufitare e funksionit në rrethinën e $x_0 = 1$ ekziston dhe është e barabartë me $\frac{1}{2}$.

Kufiri i funksionit kur argumenti tenton në pakufi.

Përkufizimi 3: Nëse për çdo varg konvergjent (x_n) , ashtu që për çdo $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in D_f$ dhe $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$, vargu përkatës $(f(x_n))$ prej vlerave të funksionit $f(x)$ është konvergjent me kufirin A , d.m.th., $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$, atëherë themi se $f(x)$ ka kufi A kur x tenton në ∞ dhe shkruajmë $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$.

Shembulli 3. Të njehsohet vlera kufitare $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x-1}$.

Zgjidhje: Fusha e përkufizimit të funksionit $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Le të jetë (x_n) varg prej numrave realë ashtu që $x_n \neq 1$, për çdo $n \in \mathbb{N}$ dhe $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$, atëherë $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0$, pra prej vetive të vargut kemi:

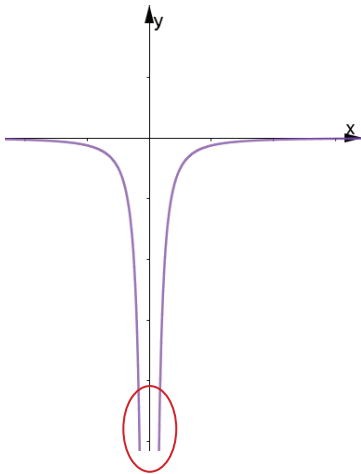
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x_n+1}{x_n-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x_n \left(2 + \frac{1}{x_n} \right)}{x_n \left(1 - \frac{1}{x_n} \right)} = \frac{2+0}{1-0} = 2, \text{ prej ku në pajtim me përkufizimin mund të}$$

$$\text{shkruajmë } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x-1} = 2.$$

Duke pasur parasysh përkufizimet paraprake, mundet grafikisht t'i paraqesim këto vlera kufitare.

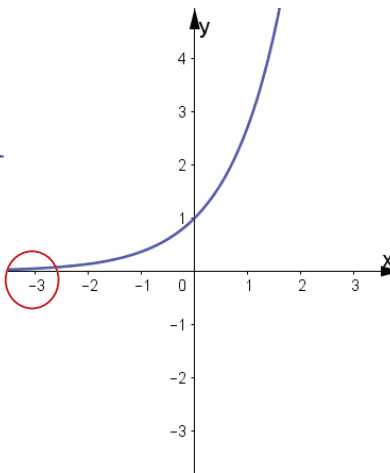
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

$$(x_0 = 0)$$

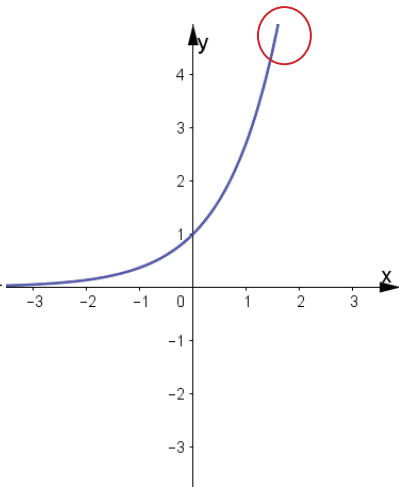


$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$$

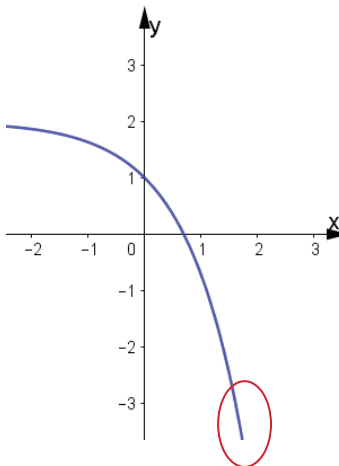
$$(A = 0)$$



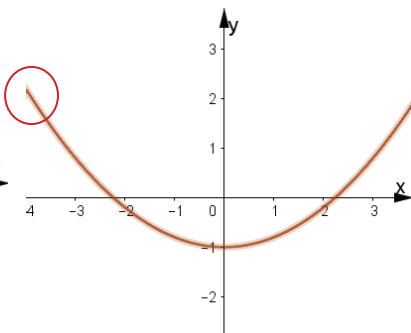
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$



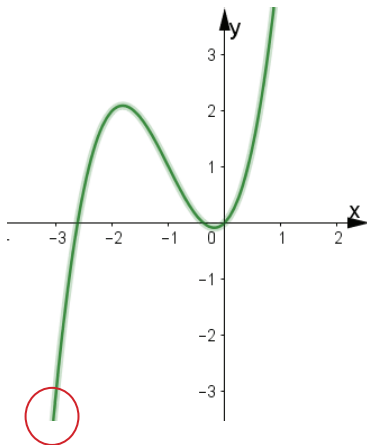
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty = \infty$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$



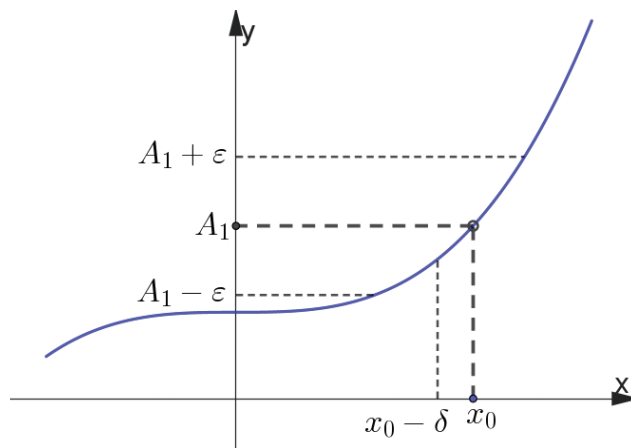
Vlera kufitare e majtë dhe e djathtë.

Shpesh ka nevojë ta konstatojmë sjelljen e funksionit kur argument x afrohet kah x_0 vetëm prej të majtës ose vetëm prej të djathtës. Në këtë mënyrë arrijmë deri te koncepti kufiri i majtë dhe i djathtë i funksionit te pika x_0 .

Përkufizimi 4: Funkzioni $f(x)$ le të jetë përkufizuar në intervalin (a, x_0) përveç eventualisht për vet numrin x_0 . Nëse për çdo varg të numrave realë (x_n) (për çdo $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in (a, x_0)$) që konvergjon kah x_0 ($\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$), vargu përkatës $(f(x_n))$ prej vlerave të funksionit është varg konvergjent që konvergjon kah numri real A_1 ($\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A_1$), atëherë themi se kufiri i funksionit $f(x)$ kur x tenton kah x_0 prej të majtës është numri A_1 dhe shkruajmë $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A_1$. Për numrin real A_1 themi se është **vlera kufitare e majtë** ose **kufiri i majtë** i funksionit $f(x)$ te pika x_0 .

Përkufizimi 5: Për funksionin $f(x)$ themi se ka **vlerë kufitare të majtë** A_1 , kur x tenton kah x_0 prej të majtës dhe shënojmë $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A_1$ nëse dhe vetëm nëse për çfarëdo numër të vogël $\varepsilon > 0$ ekziston $\delta > 0$ ashtu që çfarëdo $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ është i kënaqur pabarazimi $|f(x) - A_1| < \varepsilon$.

Interpretimi gjeometrik i përkufizimit 5:



Shembulli 4. Të gjendet vlera kufitare e majtë $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{x-2}$.

Zgjidhje: Fusha e përkufizimit të funksionit është $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Le të jetë (x_n) është varg prej numrave realë ashtu që $x_n < 2$, për çdo $n \in \mathbb{N}$ dhe $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$. Prej $x_n < 2$ kemi $x_n - 2 < 0$ për çdo $n \in \mathbb{N}$ dhe $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - 2) = 0$, prej ku vijon

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{x_n - 2} = \frac{3}{\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - 2)} = -\infty$$

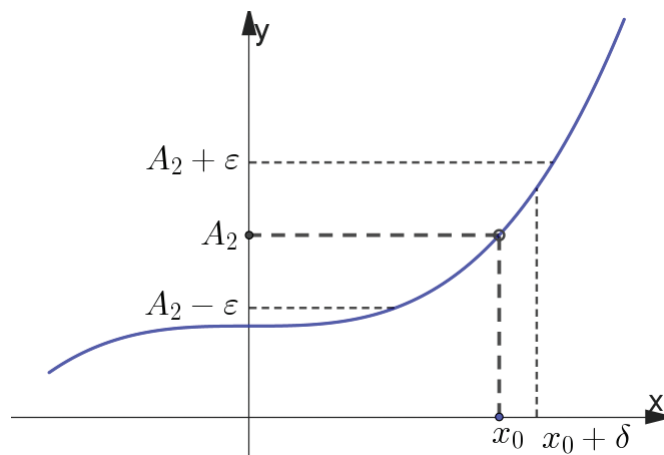
Mund të shkruajmë se vlera kufitare e majtë është $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{x-2} = -\infty$.

Përkufizimi 6: Funkzioni $f(x)$ le të jetë përkufizuar në intervalin (x_0, b) përveç eventualisht për vet numrin x_0 . Nëse për çdo varg të numrave realë (x_n) (për çdo $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in (x_0, b)$) që konvergjon kah x_0 ($\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$), Vargu përkatës $(f(x_n))$ prej vlerave të funksionit është varg konvergjent që konvergjon kah numri real A_2 ($\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A_2$), atëherë themi se kufiri i funksionit $f(x)$ kur x tenton ka x_0 prej të djathtës është numri A_2 ($\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A_2$).

Për numrin real A_2 themi se është **vlera kufitare e djathtë** ose **kufiri i djathtë** i funksionit $f(x)$ te pika x_0 .

Përkufizimi 7: Për funksionin $f(x)$ themi se ka **vlerë kufitare të djathtë** A_2 , kur x tenton kah x_0 prej të djathtës dhe shënojmë $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A_2$ nëse dhe vetëm nëse për çfarëdo numër të vogël $\varepsilon > 0$ ekziston $\Delta > 0$ ashtu që për çdo $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ është plotësuar pabarazimi $|f(x) - A_2| < \varepsilon$

Interpretimi gjeometrik i përkufizimit 7:



Shembulli 5. Të gjendet vlera kufitare e djathtë $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{x-2}$.

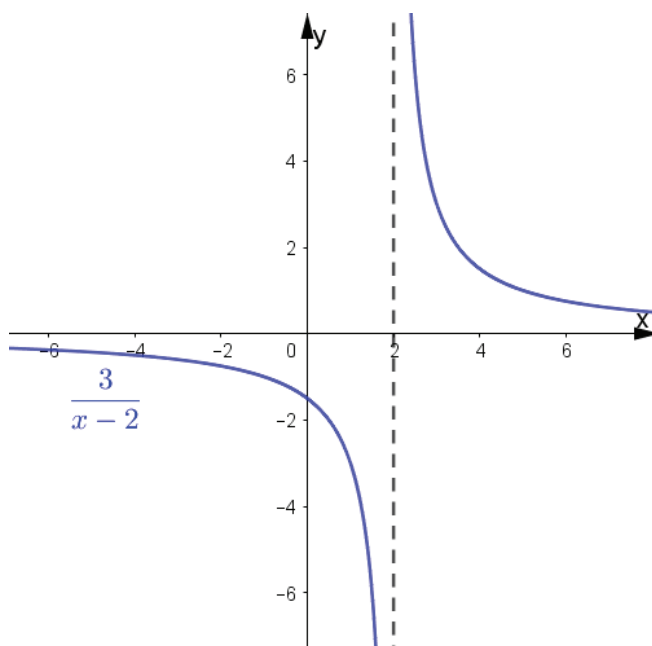
Zgjidhje: Fusha e përkufizimit të funksionit është $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Le të jetë (x_n) varg prej numrave realë ashtu që $x_n > 2$, për çdo $n \in \mathbb{N}$ dhe $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$. Prej $x_n > 2$ kemi $x_n - 2 > 0$ për çdo

$n \in N$ dhe $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - 2) = 0$ prej ku vijon

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{x_n - 2} = \frac{3}{\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - 2)} = +\infty.$$

Mund të shkruajmë se vlera kufitare e djathtë është $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{x - 2} = +\infty$.

Grafikisht është paraqitur edhe sjellja e grafikut në rrethinën e pikës me abshisë $x = 2$ (drejtëza $x = 2$).



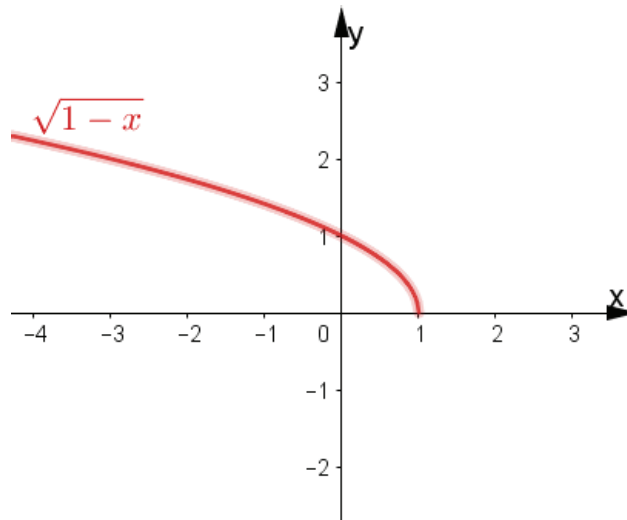
Shembulli 6. Le të jetë dhënë funksioni $f(x) = \sqrt{1-x}$, fusha e përkufizimit të këtij funksionit është $x \leq 1$ d.m.th., $D_f = (-\infty, 1]$. Për funksionin mund të kërkohet vetëm vlera kufitare prej të majtës $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x}$.

Zgjidhje: Le të jetë (x_n) varg prej numrave realë ashtu që $x_n < 1$, për çdo $n \in N$ dhe $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$. Prej $x_n < 1$ kemi $1 - x_n > 0$ për çdo $n \in N$ dhe $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - x_n) = 0$, prej ku vijon

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 - x_n} = 0.$$

Mund të shkruajmë se vlera kufitare e majtë është $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x} = 0$.

Te figura, grafikisht është paraqitur funksioni dhe vlera kufitare.

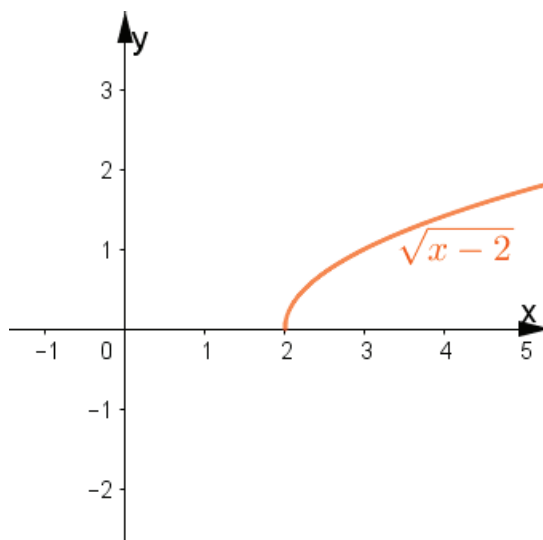


Shembulli 7. Le të jetë dhënë funksioni $f(x) = \sqrt{x-2}$, fusha e përkufizimit të këtij funksioni është $x \geq 2$ d.m.th., $D_f = [2, +\infty)$. Për këtë funksion mund të kërkohet vlera kufitare prej të djathtës $\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x-2}$.

Zgjidhje: Le të jetë (x_n) vargu prej numrave realë ashtu që $x_n > 2$, për çdo $n \in \mathbb{N}$ dhe $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$. Prej $x_n > 2$ kemi $x_n - 2 > 0$ për çdo $n \in \mathbb{N}$ dhe $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - 2) = 0$, prej ku vijon $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n - 2} = 0$.

Mund të shkruajmë se vlera kufitare e djathtë është $\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x-2} = 0$.

Grafikisht është paraqitur funksioni dhe vlera kufitare.



Vërejtje:

Nëse $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ funksioni ka vlerë kufitare te $x = x_0$. (Limesi i majtë dhe i djathtë i funksionit te pika $x = x_0$ janë të barabartë, atëherë funksioni ka limes te ajo pikë dhe ai është i barabartë me limesin e majtë dhe të djathtë).

Nëse $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ funksioni nu ka vlerë kufitare te $x = x_0$.

Shembulli 8. Njehso $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{x-2}$.

Zgjidhje: Paraprakisht njehsuam se $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{x-2} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{x-2} = +\infty$, vijon se funksioni nuk ka vlerë kufitare te pika $x = 2$

Vërejtje: Vlera kufitare e funksionit te pika e paraqet sjelljen e vlerave të funksionit në rrethinën e asaj pikë.

Vetitë e kufijve të funksioneve

Me ndihmën e vetive të vargjeve konvergjente mund të vërtetohen disa veti për kufirin e funksionit, me të cilat lehtë mund t'i caktojmë vlerat kufitare të funksionit te pikat e dhëna.

Teorema: Nëse për funksionet $f(x)$ dhe $g(x)$ ekzistojnë kufijtë $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ dhe $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, atëherë:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \pm B$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \cdot B$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{A}{B}, \text{ ku } B \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c \cdot A, \text{ për ndonjë konstante } c \in R$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} = \sqrt[n]{A}, \text{ për } n \in R$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^{f(x)} = a^{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} = a^A, \text{ për } a \in R, \text{ për } A \geq 0.$$

Vërejtje:

Të gjitha këto operacione me vlerë kufitare të funksionit vlejnë edhe kur $x \rightarrow \pm \infty$, edhe për vlerën kufitare të majtë dhe të djathtë te pika x_0 .

Te numri më i madh i detyrave teorema kufitare nuk mund të zbatohet direkt, ndërsa shprehjet me të cilat janë dhënë funksionet së pari i transformojmë deri te shprehja të të cilat mund të zbatohen këto gjykime.

Shembulli 1. Të njehsohet vlera kufitare e funksionit për vlerën e dhënë $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x + 4}$.

Zgjidhje: Për ta njehsuar vlerën kufitare, së pari e njehsojmë vlerën kufitare të emëruesit $\lim_{x \rightarrow 2} (x + 4) = \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 4 = 2 + 4 = 6 \neq 0$. Në pajtim me teoremën e dhënë mund të njehsojmë

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x + 4} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 1)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x + 4)} = \frac{2^2 - 1}{2 + 4} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Shembulli 2. Të njehsohet vlera kufitare e funksionit për vlerën e dhënë:

a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2}$

Zgjidhje: Për vlerën kufitare të funksioneve të numëruesi dhe emëruesi kemi

$$\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 4) = (-2)^2 - 4 = 0 \text{ dhe } \lim_{x \rightarrow -2} (x + 2) = (-2) + 2 = 0,$$

pra për vlerën kufitare të herësit fitohet pa përcaktim $\frac{0}{0}$, ndërsa prej kësaj nuk vijon se funksioni nuk ka vlerë kur $x \rightarrow -2$. Për ta njehsuar vlerën kufitare, së pari do ta transformojmë thyesën, ashtu që numëruesin do ta zbërthejmë në shumëzues me shfrytëzimin e formulave të thjeshtimit, ndërsa pastaj do t'i thjeshtojmë me $x + 2$ (që është e mundshme, pasi x afrohet kah -2 , jo e barabartë me -2 , pra vlen $x + 2 \neq 0$ dhe në fund do të zbatojmë teoremën

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} (x - 2) = -2 - 2 = -4$$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 7x}{x^2 + x}$

Zgjidhje: Për shkakë të njëjta sikurse te nën a) kufijtë e funksioneve të numëruesi dhe emëruesi janë të barabarta me 0, ndërsa i shkruajmë mbi shenjën për barazim, ndërsa pastaj i transformojmë numëruesin dhe emëruesin me zbërthim dhe thjeshtojmë me shumëzuesin e njëjtë. Kështu kemi:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 7x}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x - 7)}{x(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - 7)}{(x + 1)} = \frac{0 - 7}{0 + 1} = -7$$

Në vazhdim, hapat fillestar do t'i njehsojmë përmendësh dhe do t'i shkruajmë rezultatet mbi shenjën e parë për barazi, ndërsa pastaj do të vazhdojmë me transformimet dhe zbatimin e teoremës për njehsim të vlerës kufitare.

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x + 2}$$

Zgjidhje: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x + 2} = \frac{0}{0}$

Zgjidhjet e barazimit katror $x^2 - 4x + 3 = 0$ janë $x_1 = 1$ dhe $x_2 = 3$, pra trinomi katror te numëru-esi zbërthehet në shumëzues linear $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$.

Zgjidhjet e barazimit katror $x^2 - 3x + 2 = 0$ janë $x_1 = 1$ dhe $x_2 = 2$, pra trinomi katror te numëru-esi zbërthehet në shumëzues linear $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$.

Tani me zëvendësimin dhe shfrytëzimin e teoremës për operacione me vlerë kufitare kemi:

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-3)}{(x-2)} = \frac{1-3}{1-2} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$ç) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$$

Zgjidhje: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2 + x + 1} = \frac{1+1}{1^2 + 1 + 1} = \frac{2}{3}$

Shembulli 3. Të njehsohet vlera kufitare e funksionit për vlerën e dhënë:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2}$$

Zgjidhje: Te detyra vijuese do të shfrytëzojmë mënyrën e racionalizimit të numëruesit.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2}}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{2})^2}{(x - 2)(\sqrt{x} + \sqrt{2})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{(x - 2)(\sqrt{x} + \sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(\sqrt{x} + \sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{\sqrt{x+9} - 3}$$

Zgjidhje: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{\sqrt{x+9} - 3} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{\sqrt{x+9} - 3} \cdot \frac{\sqrt{x+4} + 2}{\sqrt{x+4} + 2} \cdot \frac{\sqrt{x+9} + 3}{\sqrt{x+9} + 3} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+4})^2 - 2^2}{(\sqrt{x+9})^2 - 3^2} \cdot \frac{\sqrt{x+9} + 3}{\sqrt{x+4} + 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+4-4}{x+9-9} \cdot \frac{\sqrt{x+9} + 3}{\sqrt{x+4} + 2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+9} + 3}{\sqrt{x+4} + 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} + 3}{\sqrt{x+4} + 2} = \frac{\sqrt{0+9} + 3}{\sqrt{0+4} + 2} = \frac{3+3}{2+2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$$

Zgjidhje: $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2} \cdot \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2} \cdot \frac{\sqrt{1+2x} + 3}{\sqrt{1+2x} + 3} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-8+2x}{x-4} \cdot \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{1+2x} + 3} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(x-4)}{x-4} \cdot \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{1+2x} + 3} =$$

$$= 2 \cdot \frac{\sqrt{4} + 2}{\sqrt{9} + 3} = 2 \cdot \frac{4}{6} = \frac{4}{3}$$

Shembulli 4. Të njehsohet vlera kufitare e funksionit për vlerën e dhënë

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 7}$$

Zgjidhje: Kur $x \rightarrow \infty$ numëruesi dhe emëruesi janë pafund madhësi të mëdha dhe herësi i tyre është i pa përcaktuar $\frac{\infty}{\infty}$, prandaj shprehjen paraprakisht e transformojmë (e nxjerr dhe pastaj do të mund të shfrytëzohet teorema për vlerën kufitare. Vijn

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 7} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2} \right)}{x^2 \left(\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2} + \frac{7}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{7}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{7}{x^2}} = \frac{1 - 0}{1 - 0 + 0} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x^3 + x + 5}$$

Zgjidhje:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x^3 + x + 5} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(\frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2} \right)}{x^3 \left(\frac{x^3}{x^3} + \frac{x}{x^3} + \frac{5}{x^3} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 \left(1 - \frac{4}{x^2} \right)}{x \left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x^3} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{\left(1 - \frac{4}{x^2} \right)}{\left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x^3} \right)} = 0 \cdot \frac{1 - 0}{1 + 0 + 0} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3}{3x^2 - 4}$$

Zgjidhje: Mënyra e shkurtër e cila mund të shfrytëzohet gjatë zgjidhjes së detyrave:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3}{3x^2 - 4} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x^2} \right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{4}{x^2} \right)} = \frac{1}{3}$$

Shembulli 5. Të njehsohet vlera kufitare e funksionit për vlerën e dhënë:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{3x^2 - 4} - \frac{x^2}{3x + 2} \right)$$

Zgjidhje: Kur $x \rightarrow \infty$ thyesa e parë dhe e dytë janë madhësi të mëdha të pafundshme dhe kemi pa përcaktim $(\infty - \infty)$, prandaj shprehjen paraprakisht e transformojmë

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{3x^2 - 4} - \frac{x^2}{3x + 2} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3(3x + 2) - x^2(3x^2 - 4)}{(3x^2 - 4)(3x + 2)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^4 + 2x^3 - 3x^4 + 4x^2}{(3x^2 - 4)(3x + 2)} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^3 + 4x^2}{(3x^2 - 4)(3x + 2)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \cdot \left(\frac{2x^3}{x^3} + \frac{4x^2}{x^3} \right)}{x^2 \cdot \left(\frac{3x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2} \right) \cdot x \cdot \left(\frac{3x}{x} + \frac{2}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{4}{x}}{\left(3 - \frac{4}{x^2} \right) \left(3 + \frac{2}{x} \right)} = \end{aligned}$$

$$= \frac{2+0}{(3-0)(3+0)} = \frac{2}{9}$$

Shembulli 6. Të njehsohet vlera kufitare e majtë $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{x-2}$.

Zgjidhje: Vlerën kufitare të majtë $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{x-2}$ do ta gjejmë nëse fusim zëvendësim $x = 2 - h$, ku $h > 0$ dhe $h \rightarrow 0$. Kemi

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{x-2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3}{2-h-2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3}{-h} = -\infty$$

Shembulli 7. Të gjendet vlera kufitare e djathtë $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{x-2}$

Zgjidhje: Vlerën kufitare të djathtë $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{x-2}$ do ta gjejmë nëse fusim zëvendësim $x = 2 + h$, ku $h > 0$ dhe $h \rightarrow 0$. Kemi

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{x-2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3}{2+h-2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3}{h} = +\infty$$

Shembulli 8. Le të jetë dhënë funksioni $f(x) = \sqrt{3-x}$, fusha e përkufizimit të këtij funksioni është $x \leq 3$ d.m.th., $D_f = (-\infty, 3]$. Për këtë funksion mund të kërkohet vetëm vlera kufitare prej të majtës $\lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{3-x}$.

Zgjidhje: $\lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{3-x} = \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{3-(3-h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{h} = 0$. Fusim zëvendësim $x = 3 - h$ ku $h > 0$ dhe $h \rightarrow 0$.

Shembulli 9. Le të jetë dhënë funksioni $f(x) = 2 + \sqrt{x-1}$, fusha e përkufizimit të këtij funksioni është $x \geq 1$ d.m.th., $D_f = [1, +\infty)$. Për këtë funksion mund të kërkohet vetëm vlera kufitare prej të djathtës $\lim_{x \rightarrow 1^+} (2 + \sqrt{x-1})$.

Zgjidhje: $\lim_{x \rightarrow 1^+} (2 + \sqrt{x-1}) = \lim_{h \rightarrow 0} (2 + \sqrt{(1+h)-1}) = \lim_{h \rightarrow 0} (2 + \sqrt{h}) = 2 + 0 = 2$. Fusim zëvendësim $x = 1 + h$ ku $h > 0$ dhe $h \rightarrow 0$.

Shembulli 10. Funksioni $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ te pika $x = 2$ nuk është përkufizuar.

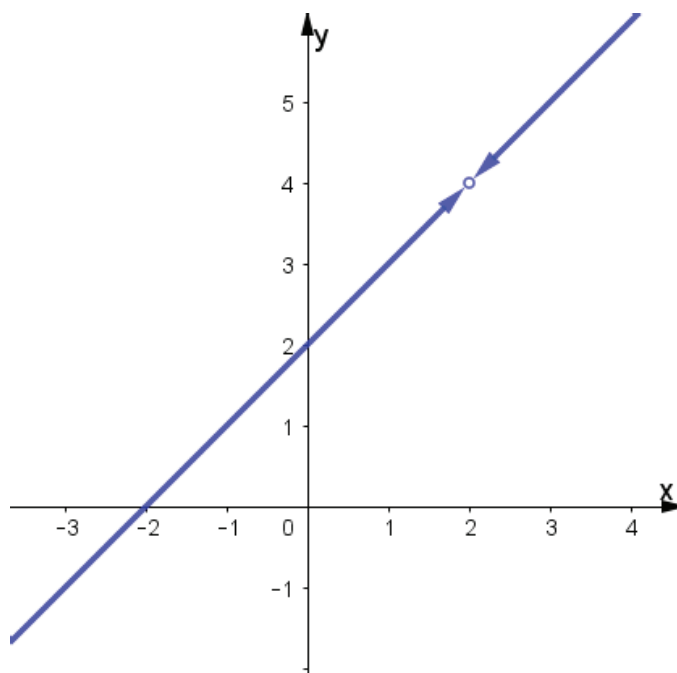
Vallë $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ tenton kah vlera e caktuar kur $x \rightarrow 2$? Të njehsohet vlera kufitare dhe grafikisht të paraqitet funksioni.

Zgjidhje: Le të jetë dhënë funksioni $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, me fushën e përkufizimit $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Ta shqyrtojmë vlerën e funksionit në rrethinë e pikës $x = 2$. Te tabela vijuese janë dhënë disa vlera të funksionit, të cilat janë fituar prej vargut me anëtarin e përgjithshëm $x_n = 2 + \frac{4}{10^n}$ që tenton kah 2.

x	2,4	2,04	2,004	2,0004	$\dots \rightarrow 2$
$f(x)$	4,4	4,04	4,004	4,0004	$\dots \rightarrow 4$

Grafikisht i paraqitur funksioni



Funksioni nuk është përkufizuar te pika $x = 2$, ndërsa ekzistojnë vlerë kufitare e majtë dhe e djathtë, ndërsa ato janë të barabarta.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x + 2) = \lim_{h \rightarrow 0} (2 - h + 2) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 2) = \lim_{h \rightarrow 0} (2 + h + 2) = 4$$

Vijon funksioni ka vlerë kufitare $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$.

Detyra për ushtrime:

1. Cakto këto vlera kufitare:

a) $\lim_{x \rightarrow -2} (2x^2 - 5x + 1)$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-4}{3x+1}$

2. Gjeje kufirin e majtë dhe të djathtë të funksionit:

a) $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ te $x_0 = 1$

b) $f(x) = \frac{x-4}{x+2}$ te $x_0 = -2$

c) $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 2}{x^2 - 6x + 8}$ te $x_0 = 2$

ç) $f(x) = \frac{x-1}{|x-1|}$ te $x_0 = 1$

d) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ te $x_0 = 0$

dh) $f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$ te $x_0 = 0$

3. Gjeji vlerat kufitare:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 + 5x^4 + 4x}{x^5 + 2x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 2x + 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x + 2}$

ç) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - a}{x - a}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{6}}{x}$

dh) $\lim_{x \rightarrow b} \frac{x-b}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{b}}$

e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$

4. Gjeji vlerat kufitare:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2x^2}{x^2-1} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{3x^2-4} - \frac{x^2}{3x+5} \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x+6}{x^2-16} - \frac{x+1}{x^2-4x} \right)$

ç) $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{4}{x^2-4} \right)$

d) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \left(\frac{4x+3}{3x-1} - \frac{12x^2+7x+5}{9x^2-1} \right)$

dh) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+4x} - x)$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+2x-5} - x)$

5. Gjeji këto vlera kufitare:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 1}{x^2 + 9x}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{4x^2 + x + 2}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^3 + 1}$

ç) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - x^2 + 4x - 3}{3x^2 - 4x + 1}$

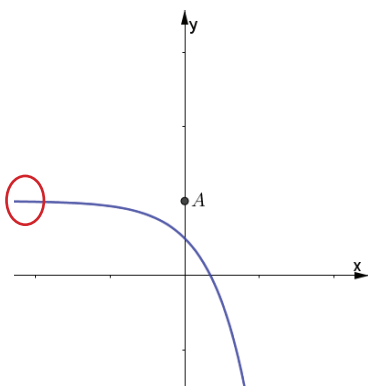
d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x - 3}$

dh) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + a} - \sqrt{x})$

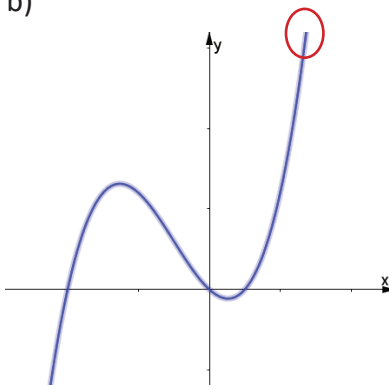
e) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + bx})$

6. Janë dhënë grafikët e funksioneve. Të caktohen vlerat kufitare përkatëse në fushën të shënuar me ngjyrë të kuqe.

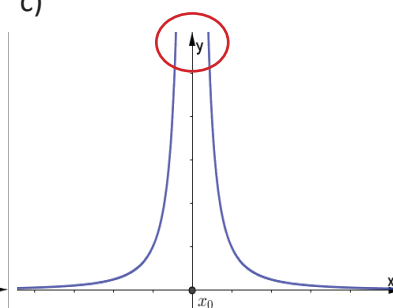
a)



b)



c)



Lidhi figurat me përgjigje e ofruara përkatëse:

1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$,

2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$,

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$

2. VIJUESHMËRIA E FUNKSIONIT

Vijueshmëria e funksionit është koncept shumë i rëndësishëm në matematikë. Shumë dukuri natyrore, ndërsa edhe procese teknologjike janë të lidhura me vijueshmërinë e funksioneve reale. Përkufizimi për konceptin është lidhur me vlerën kufitare.

Të shqyrtojmë disa shembuj të funksioneve dhe të vërejmë çka vlen për ato.

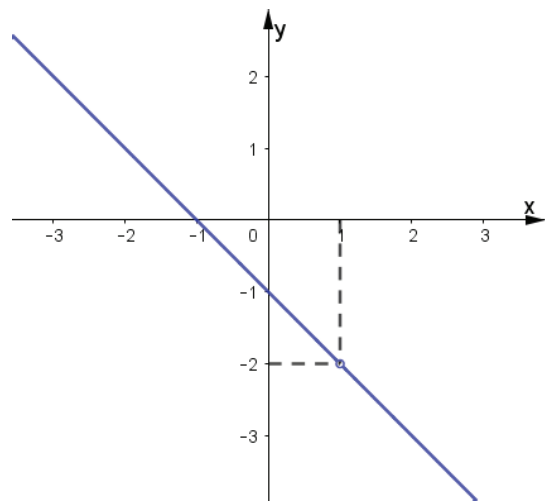
Shembulli 1. Të gjendet vlera kufitare e funksioneve në pikën $x_0 = 1$. Çka mund të përfundohet për vlerën kufitare dhe vlera e funksionit në këtë pikë.

$$\text{a) } f(x) = \frac{x^2 - 1}{1 - x}$$

Zgjidhje: Fusha e përkufizimit $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Vlera e funksionit për $x_0 = 1$ nuk ekziston, ndërsa për vlerën kufitare kemi (është paraqitur me pikë të zbrazët)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{1 - x} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{-(x-1)} = \\ &= -\lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = -2 \end{aligned}$$



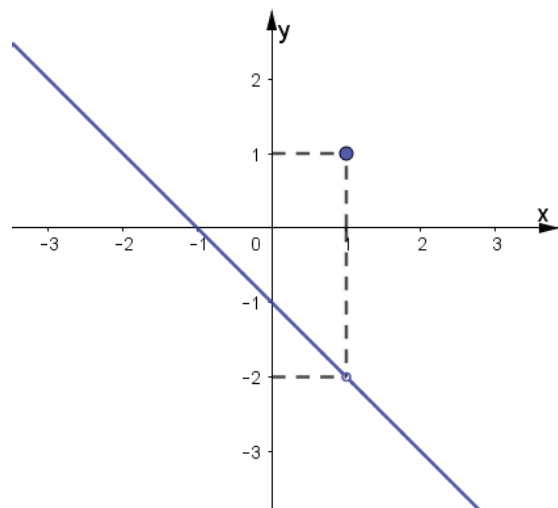
$$\text{b) } g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{1 - x}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

Zgjidhje: Fusha e përkufizimit është $D_g = \mathbb{R}$

Vlera e funksionit për $x_0 = 1$ është $g(1) = 1$, ndërsa për vlerën kufitare kemi

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{1 - x} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{-(x-1)} = \\ &= -\lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = -2. \text{ Kemi} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{1 - x} = -2 \neq 1 = g(1)$$



$$c) h(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{1-x}, & x \neq 1 \\ -2, & x = 1 \end{cases}$$

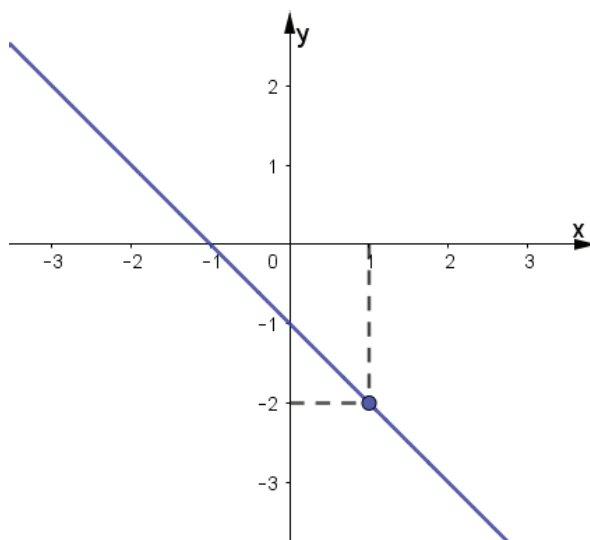
Zgjidhje: Fusha e përkufizimit është $D_f = \mathbb{R}$

Vlera e funksionit për $x_0 = 1$ është $h(1) = -2$, ndërsa për vlerën kufitare kemi

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{-(x-1)} =$$

$$= -\lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = -2. \text{ Kemi}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{1-x} = -2 = -2 = h(1)$$



Kemi se:

- a) Funksioni $f(x)$ nuk është përkufizuar te pika $x_0 = 1$, ndërsa ekziston vlerë kufitare te kjo pikë,
- b) Funksioni $g(x)$ është përkufizuar te pika $x_0 = 1$, ekziston vlerë kufitare te kjo pikë, ndërsa ato nuk janë të barabarta,
- c) Funksioni $h(x)$ është përkufizuar te pika $x_0 = 1$, ekziston vlerë kufitare te kjo pikë, ndërsa ato janë të barabarta,

Vijon se, funksioni $h(x)$ është i pavijueshëm në pikën $x_0 = 1$, ndërsa funksionet $f(x)$ dhe $g(x)$ janë të pavijueshme në atë pikë.

Përkufizimi 1: Për funksionin $f(x)$ të përkufizuar në bashkësinë D_f themi se është i **pavijueshëm në atë pikë** $x_0 = x$ nëse:

- 1) $f(x)$ është përkufizuar në pikën $x_0 = x$, d.m.th., $x_0 \in D_f$,
- 2) ekziston $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$,
- 3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Nëse për funksionin $f(x)$ nuk është plotësuar njëri prej kushteve 1) – 3), atëherë ai është i pavijueshëm në pikën x_0 . Për pikën x_0 themi se ajo është **pikë e pavijimit**.

Shembulli 2. Të shqyrtohet vijueshmëria e funksionit $f(x) = \frac{2x}{3-x}$ në pikën $x = 2$.

Zgjidhje: Kontrollojmë a janë plotësuar kushtet prej përkufizimit.

Fusha e përkufizimit të funksionit është $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

1. $2 \in D_f$ dhe mund të caktohet vlera $f(2) = \frac{2 \cdot 2}{3-2} = 4$,

2. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x}{3-x} = \frac{2 \cdot 2}{3-2} = 4$, d.m.th., ekziston $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

3. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4 = f(2)$.

Në pajtim me përkufizimin e funksionit $f(x) = \frac{2x}{3-x}$ është i vijueshëm në pikën me abshisë $x = 2$.

Shembulli 3. Të shqyrtohet vijueshmëria e funksionit $f(x) = \frac{2x}{3-x}$ në pikën $x = 3$.

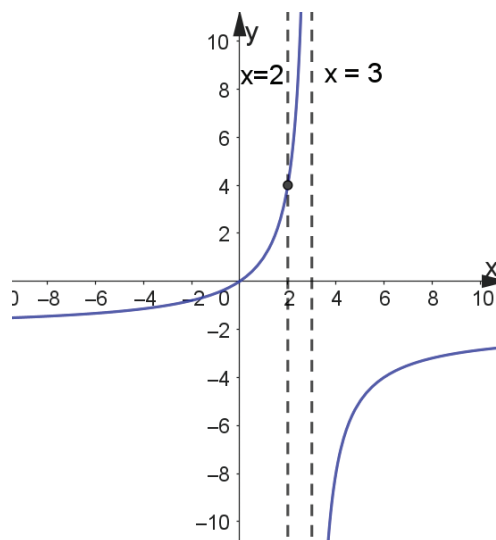
Zgjidhje: Kontrollojmë a janë plotësuar kushtet prej përkufizimit.

Fusha e përkufizimit të funksionit është $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

1. $3 \notin D_f$ dhe nuk mund të caktohet vlera $f(3) = \frac{2 \cdot 3}{3-3} = \frac{6}{0}$ (pjesëtimi me zero nuk është e mundur!!!),

Pasi nuk është plotësuar njëri prej kushteve prej përkufizimit, mund të mos vazhdojmë me kontrollin e kushteve të tjera, ndërsa sjellim përfundim se funksioni $f(x) = \frac{2x}{3-x}$ ka ndërprerje në pikën $x = 3$, d.m.th., është i pavijueshëm.

Grafikisht është paraqitur funksioni:



Përkufizimi 2: $y = f(x)$ është i vijueshëm te bashkësia $A \subseteq D_f$ nëse është i vijueshëm në çdo pikë $x_0 \in A$.

Shembulli 4. Të shqyrtohet vijueshmëria e funksionit $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$ në të gjithë fushën e përkufizimit.

Zgjidhje: Fusha e përkufizimit është $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Le të jetë a çfarëdo numër real i ndryshueshëm prej -2 . Vijon:

$$1. a \in D_f \text{ dhe mund të caktohet vlera } f(a) = \frac{a-2}{a+2} \text{ për } a \neq -2,$$

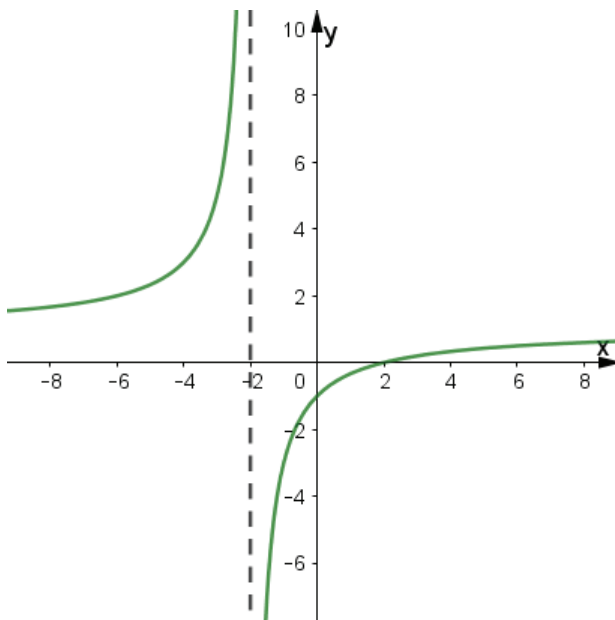
$$2. \text{Ekziston kufi } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x-2}{x+2} = \frac{a-2}{a+2}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{a-2}{a+2} = f(a)$$

Vijon se, funksioni $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$ është i vijueshëm në pikën $x = a \in D_f$. Pasi a është çfarëdo numër real prej fushës së përkufizimit të funksionit, vijon se funksioni është i vijueshëm në të gjithë fushën e përkufizimit.

Funksioni nuk është i përcaktuar në pikën $a = -2$, pra prej përkufizimit vijon se ajo është pika e pavijimit për funksionin $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$.

Grafikisht është paraqitur funksioni:



Teorema: Nëse funksionet $f(x)$ dhe $g(x)$ janë të vijueshme në pikën $x = x_0 \in D_f \cap D_g$, atëherë në pikën $x = x_0$ janë të vijueshëm edhe funksionet:

$$f(x) + g(x), f(x) \cdot g(x) \text{ dhe } \frac{f(x)}{g(x)} \text{ nëse } g(x_0) \neq 0.$$

Shembulli 5. Të caktohen pikat e pavijimit të funksionit $f(x) = \frac{x+2}{x^2-4}$.

Zgjidhje: Fusha e përkufizimit të funksionit është $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

Të shqyrtojmë së pari në çdo pikë prej fushës së përkufizimit.

1. $a \in D_f$ dhe mund të caktohet vlera $f(a) = \frac{a+2}{a^2-4}$ për $a \neq -2$ dhe $a \neq 2$,

2. Ekziston kufi $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x+2}{x^2-4} = \frac{a+2}{a^2-4}$

3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{a+2}{a^2-4} = f(a)$.

Vijon se funksioni është i vijueshëm për çdo pikë $a \in D_f$.

Funksioni nuk është i vijueshëm në pikat $x = -2$ dhe $x = 2$, pra prej përkufizimit vijon se ato pika të pavijimit për funksionin $f(x) = \frac{x+2}{x^2-4}$.

Për vlerat kufitare në këto pika kemi:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x+2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x+2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x+2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x+2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{4}$$

$$\text{Vijon } \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\frac{1}{4} = \lim_{x \rightarrow -2} f(x).$$

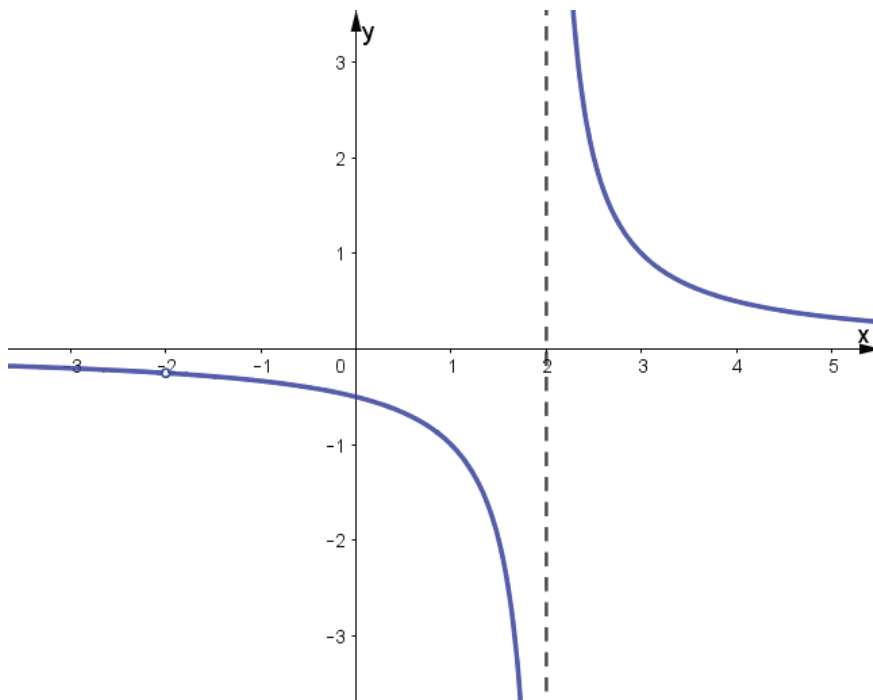
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$$

$$\text{Vijon } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x).$$

Kemi se te pika e vijimit $x = -2$ funksioni ka vlerë kufitare, por te pika e pavijimit $x = 2$ nuk ka vlerë kufitare, as kufi të pafundshëm.

Grafiku i funksionit është:



Vërejtje: Funksioni polinomial $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$, $n \in \mathbb{N}$, për $a_0, \dots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$, është i vijueshëm në të gjithë bashkësinë e numrave realë.

Vërtetimi është në mënyrë të ngjashme sikurse pjesa e parë prej shembullit 5.

Shembulli 6. Ta shqyrtojmë vijimin e funksionit $f(x) = \begin{cases} -1, & x \leq 0 \\ x-1, & x > 0 \end{cases}$.

Zgjidhje: Për $x \leq 0$, $f(x)$ është funksion konstant, d.m.th., $y = -1$, që është i vijueshëm në çdo pikë.

Për $x > 0$, $f(x)$ është funksion polinomial të shkallës së parë dhe është i vijueshëm në çdo pikë.

Pika e vetme kritike është $x = 1$, pasi majtas dhe djathtas prej pikës së funksionit është caktuar me shprehje të ndryshme. Të kontrollojmë për $x = 0$.

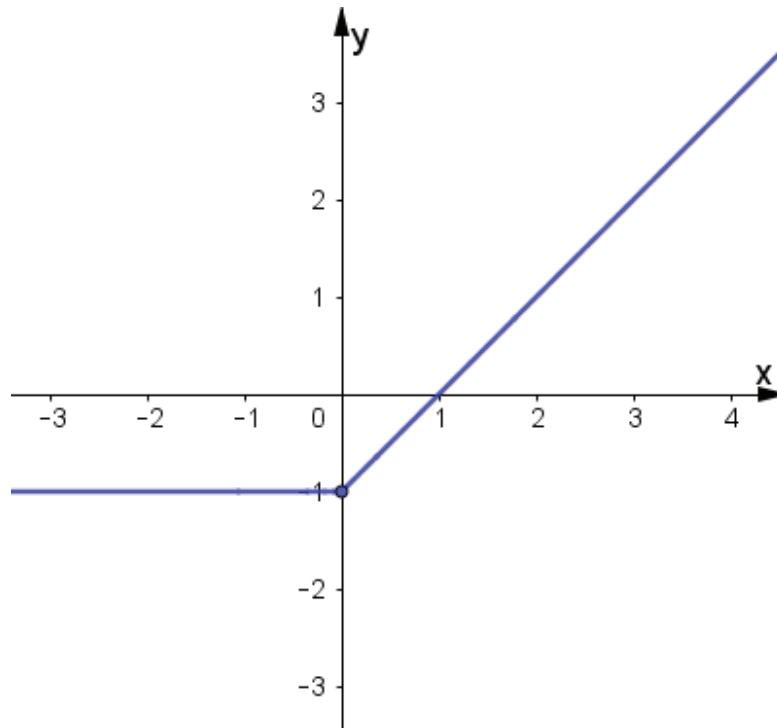
$$1. f(0) = -1,$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1 \text{ dhe } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1) = -1 \text{ vijon } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1,$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1 = f(0).$$

Kemi se, funksioni është i vijueshëm në pikën $x = 0$.

Grafikisht është paraqitur funksioni:



Shembulli 7. Vallë funksioni $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ x^2, & 0 < x \leq 4 \\ x + 4, & x > 4 \end{cases}$ është i vijueshëm

Zgjidhje: I shqyrtojmë pikat problematike " $x = 0$ dhe $x = 4$ ". Te të gjitha pikat tjera d.m.th., interval, funksioni është i vijueshëm.

Kontrollojmë për $x = 0$ te kushtet prej përkufizimit:

1. $f(0) = 0$
2. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$ dhe $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0$, vijon pra $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$.

Kemi se funksioni $f(x)$ është i vijueshëm në pikën $x = 0$.

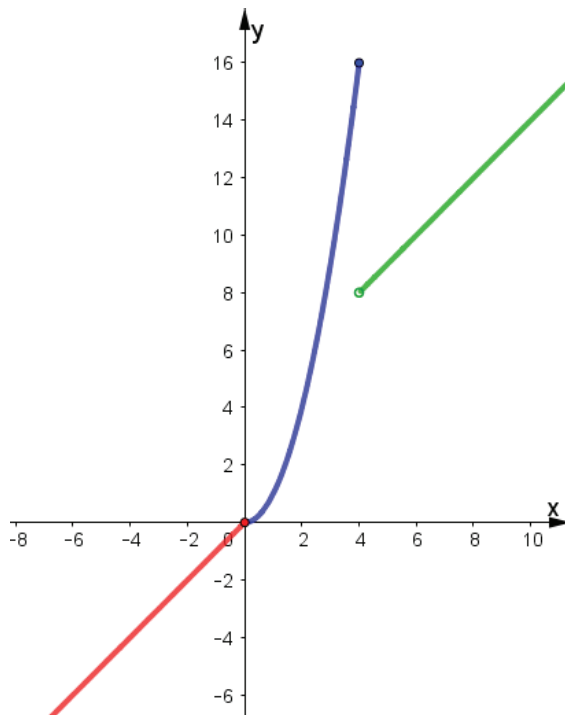
Tani kontrollojmë për $x = 4$ te kushtet e përkufizimit:

1. $f(4) = 16$,
2. $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} x^2 = 16$ dhe $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} (x + 4) = 8$,

$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$ pra $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ nuk ekziston.

Prandaj funksioni është i pavijueshëm në pikën $x = 4$.

Grafiku i funksionit është:

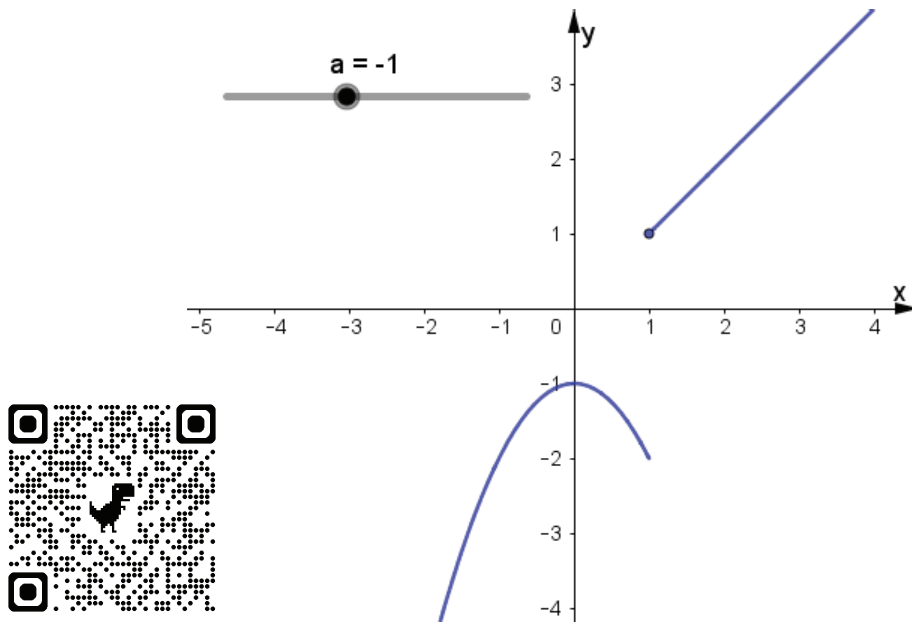


Shembulli 8. Vallë ekziston numër real a ashtu që funksioni $f(x) = \begin{cases} ax^2 - 1, & x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$ është i vijueshëm?

Zgjidhje: Së pari të hulumtojmë. Duke e shfrytëzuar apletin të punuar në Geogebër, të zhvendosim rrëshqitësin a dhe të vërejmë për cilën vlerë të a funksioni do të jetë i vijueshëm.

Aplet për animacion me të cilin grafikasht do të caktojmë vijueshmërinë e funksionit.

Vërejtje: Çka duhet të vërejmë dhe kur do të jetë i vijueshëm? Me zhvendosjen e vlerës së rrëshqitësit ndryshon grafiku i funksionit $ax^2 - 1$. Duam të kemi tëp dy grafikët të lidhen te pika me abshisë $x = 1$.



<https://www.geogebra.org/m/suemrzya>

Për $x < 1$, $f(x)$ është funksion polinomial i shkallës së dytë, që është i vijueshëm në çdo pikë.

Për $x \geq 1$, $f(x)$ është funksion polinomial i shkallës së parë dhe është i vijueshëm në çdo pikë.

Pika e vetme kritike është $x = 1$, pasi në të majtë dhe të djathtë të pikës funksioni është i caktuar me shprehje të ndryshme. Për cilën vlerë të parametrin a funksioni Për $f(x)$ është funksion polinomial të shkallës së dytë, që është i vijueshëm në çdo pikë. Do të jetë i vijueshëm për $x = 1$. Prej përkufizimit kemi:

$$1. f(1) = 1,$$

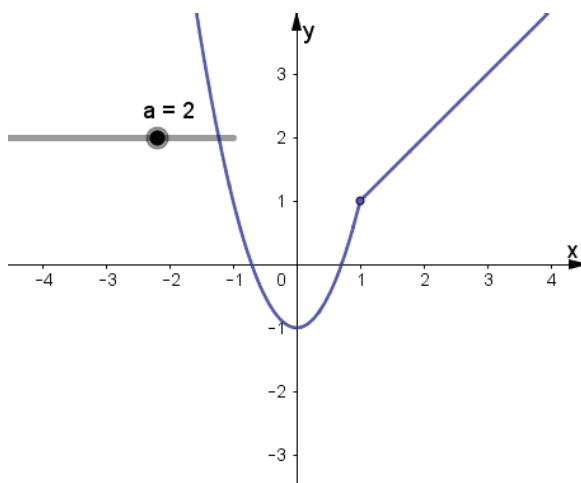
$$2. \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^2 - 1) = a - 1 \text{ dhe } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1,$$

Vijon se për të ekzistuar vlera kufitare duhet $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ d.m.th., $a - 1 = 1$, prej ku kemi $a = 2$.

$$3. \text{ Edhe për vlerën } a = 2 \text{ kemi se } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 = f(1).$$

Vijon funksioni është i vijueshëm për $x = 1$, d.m.th., funksioni është i vijueshëm për çdo numër real.

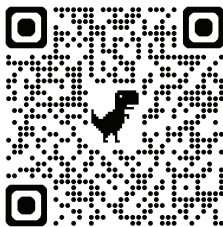
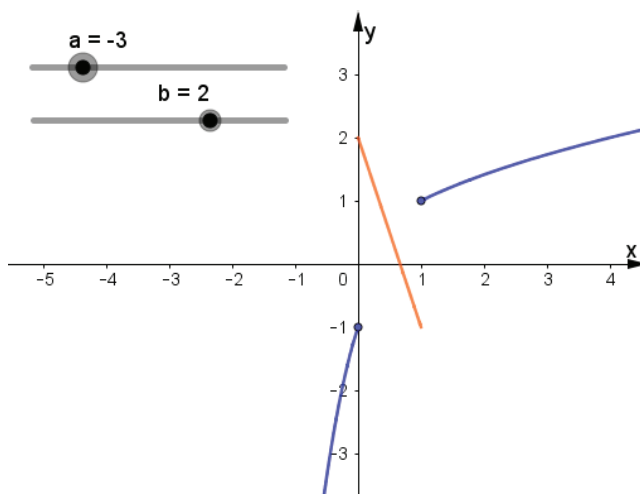
Grafikisht i paraqitur funksion i vijueshëm është:



Shembulli 9. Për cilën vlerë të parametrave a dhe b funksioni $f(x) = \begin{cases} (x-1)^3, & x \leq 0 \\ ax+b, & 0 < x < 1 \\ \sqrt{x}, & x \geq 1 \end{cases}$ është i vijueshëm?

Zgjidhje: Së pari të hulumtojmë. Duke shfrytëzuar apletin i punuar në Geogebra, t'i zhvendosim rrëshqitësit a dhe b , ndërsa të vërejmë për cilën vlerë të parametrave funksioni do të jetë i vijueshëm.

Aplet për animacion me të cilin grafikisht do të caktojmë vijueshmërinë e funksionit.



<https://www.geogebra.org/m/kvt6aayw>

Për $x \leq 0$, $f(x)$ është funksion i vijueshëm,

Për $0 < x < 1$, $f(x)$ është funksion polinomial të shkallës së parë dhe është i vijueshëm në çdo pikë,

Për $x \geq 1$, $f(x)$ është funksion i fuqisë dhe është i vijueshëm në çdo pikë të përkufizimit.

Pkat kritike janë $x = 0$ dhe $x = 1$, pasi në të majtë dhe të djathtë të pikës funksioni është i caktuar me shprehje të ndryshme. Për cilën vlerë të parametrave a dhe b funksioni $f(x)$ do të jetë i vijueshëm për $x = 0$.

Prej përkufizimit të caktojmë së pari çka duhet të jetë plotësuar për funksionin të jetë i vijueshëm për $x = 0$:

$$1) f(0) = (0-1)^3 = -1,$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-1)^3 = -1 \text{ dhe } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax+b) = b,$$

Vijon se për të ekzistuar vlera kufitare duhet $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ d.m.th., $-1 = b$, prej kum kemi $b = -1$.

$$3) \text{ Edhe për vlerën } b = -1 \text{ kemi se } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1 = f(0).$$

Prej përkufizimit të caktojmë çka duhet të jetë i plotësuar për funksionin të jetë i vijueshëm për $x = 1$:

$$1) f(1) = \sqrt{1} = 1,$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax+b) = a+b \text{ dhe } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\sqrt{x}) = 1,$$

Vijon se për të ekzistuar vlera kufitare duhet $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ d.m.th., $a+b = 1$.

$$3) \text{ Edhe për vlerat e } a+b=1 \text{ kemi se } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 = f(1).$$

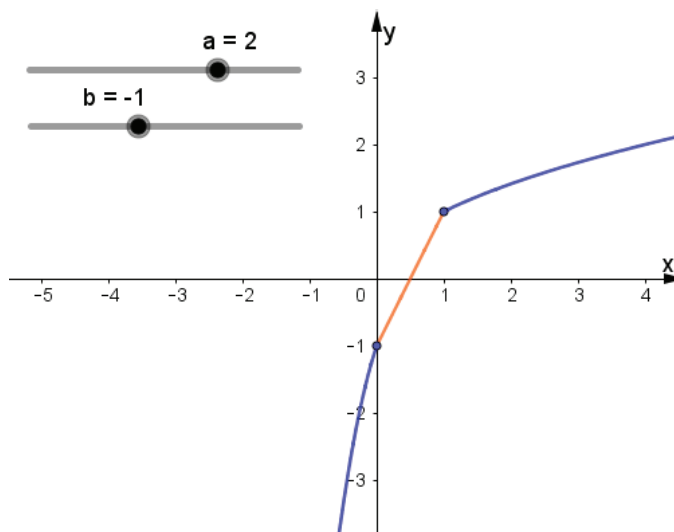
Për funksionin të jetë i vijueshëm në të dy pikat duhet të jenë plotësuar të dy kushtet, përkatësisht kemi sistem prej barazimeve

$$\begin{cases} b = -1 \\ a + b = 1 \end{cases} \text{ vijon } \begin{cases} b = -1 \\ a + (-1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = 1 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = 2 \end{cases}$$

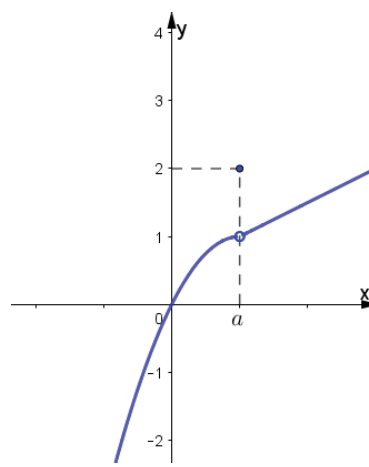
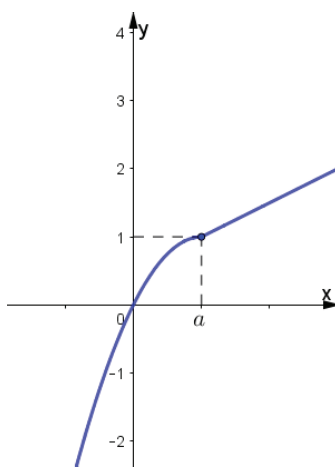
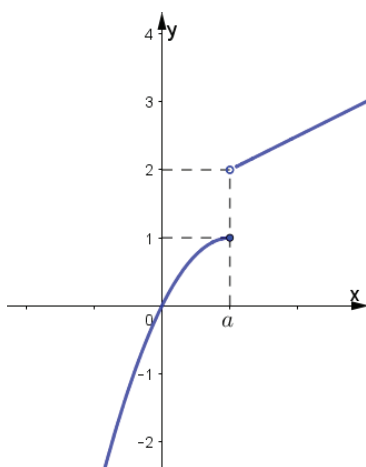
Për funksionin të jetë i vijueshëm në pikat $x = 0$ dhe $x = 1$, vlera e parametrave janë $a = 2$ dhe $b = -1$ dhe funksioni i kërkuar është:

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^3, & x \leq 0 \\ 2x-1, & 0 < x < 1 \\ \sqrt{x}, & x \geq 1 \end{cases}$$

Grafikisht i paraqitur funksioni është:



Shembulli 10. Funksionet janë dhënë grafikisht. Të caktohet cili prej këtyre funksioneve janë të vijueshme për $x = a$, ndërsa cili është vlera kufitare e funksionit te pika nëse ekziston.



Zgjidhje:

$$f(a) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 2$$

Nuk ekziston vlerë kufitare,
 $f(x)$ është i pavijueshëm për
 $x = a$

$$f(a) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 1$$

Ekziston vlerë kufitare

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1,$$

$f(x)$ është i vijueshëm për
 $x = a$

$$f(a) = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 1$$

Ekziston vlerë kufitare

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1,$$

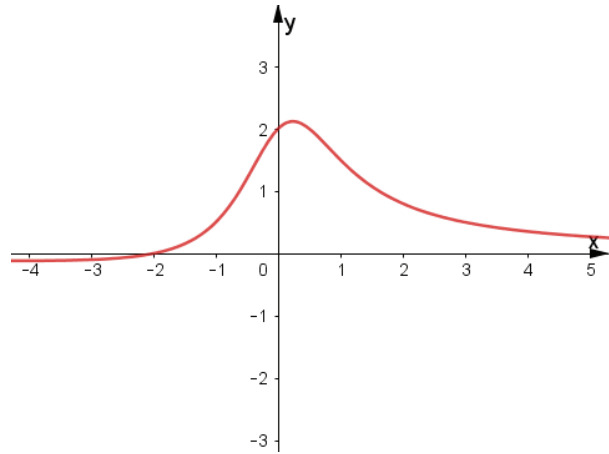
$f(x)$ është i pavijueshëm për
 $x = a$

Detyra për ushtrime:

1. Vërteto vijueshmërinë e funksioneve të fusha e dhënë:

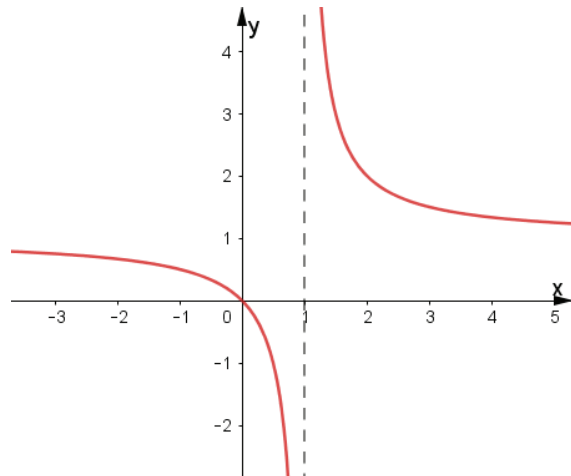
a) $f(x) = \frac{x+2}{x^2+1}$ për $x \in \mathbb{R}$

Prej anës së djathtë është paraqitur grafiku i funksionit.



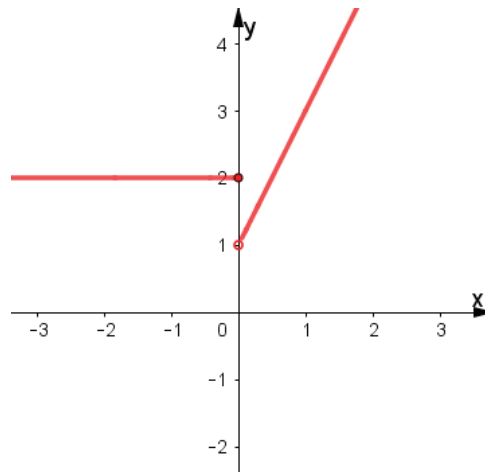
b) $f(x) = \frac{x}{x-1}$ për $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Prej anës së djathtë është paraqitur grafiku i funksionit.

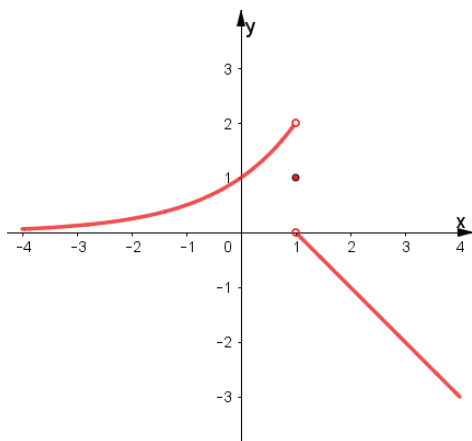


2.

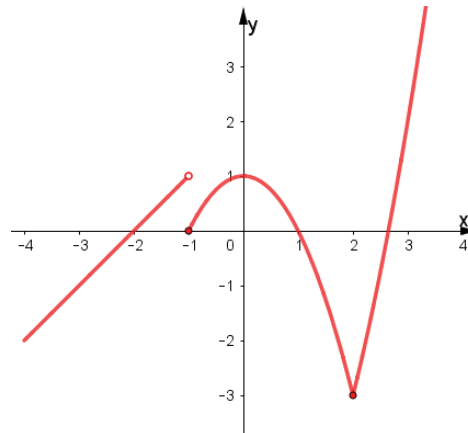
a) $f(x) = \begin{cases} 2, & x \leq 0 \\ 2x+1, & x > 0 \end{cases}$



$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} 2^x, & -4 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ -x+1, & 1 < x \leq 4 \end{cases}$$



$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} x+2, & x < -1 \\ 1-x^2, & -1 \leq x < 2 \\ x^2-7, & x \geq 2 \end{cases}$$



3. Ilogaria mujore e rrymës në amvisëri në qytetin e dhënë është dhënë me funksionin

$$f(x) = \begin{cases} 180, & 0 \leq x \leq 2 \\ 180 + 23(x-2), & x > 2 \end{cases}$$

Të shqyrtohet vijueshmëria e funksionit $f(x)$.

4. A mund të caktohet numri real a ashtu që funksioni $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 1 \\ 3-ax^2, & x > 1 \end{cases}$ të jetë i vijueshëm?

$$\text{5. Është dhënë funksioni } f(x) = \begin{cases} bx+1, & x < 2 \\ b-x, & x \geq 2 \end{cases}.$$

Gjeje vlerën e parametrin b , ashtu që funksioni është i vijueshëm për të gjithë numrat realë.

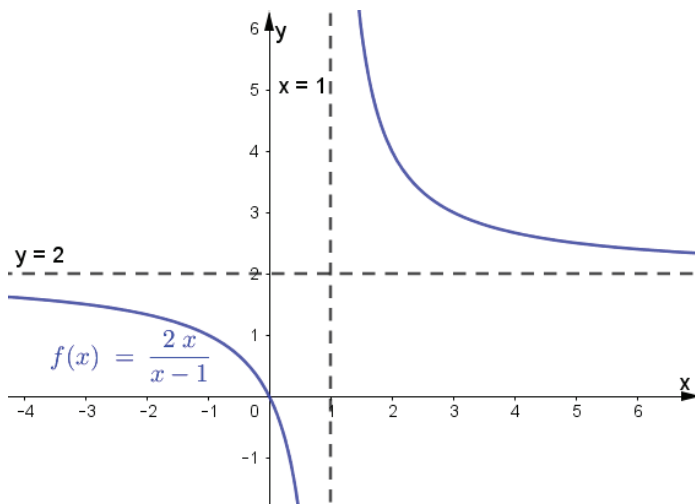
$$\text{6. Është dhënë funksioni } f(x) = \begin{cases} 1-cx+dx^2, & x \leq -1 \\ x^2+x, & -1 < x < 2. \\ cx^2+dx+4, & x \geq 2 \end{cases}$$

Gjeji vlerat e parametrave c dhe d , ashtu që funksioni $f(x)$ është i vijueshëm në intervalin $(-\infty, \infty)$. Konstrukto grafikun në Geogebër për të vërtetuar rezultatin tuaj.

3. ASIMPTOTAT E LAKORES

Në lidhje të ngushtë me konceptin vlera kufitare e funksionit është koncepti asimptota të lakores.

Shembulli 1. Është vizatuar grafiku i funksionit $f(x) = \frac{2x}{x-1}$. Çka mund të vërejmë për sjelljen e funksionit kur grafiku afrohet kah drejtëzat $x = 1$ dhe $y = 2$?



Prej vizatimi për vlerën $x = 1$ mund të vërejmë këto veti:

Kur argument x tenton kah 1 nëpërmjet vargut të vlerave të cilat janë më të mëdha se 1, ashtu që $x_1 > x_2 > x_3 > \dots$, ndërsa vargu përkatës prej pikave $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$, ... aq më shumë afrohet deri te drejtëza $x = 1$, ndërsa vargu përkatës prej vlerave të funksionit $y_1, y_2, y_3, \dots$ pafundësisht rritet, d.m.th., tenton kah $+\infty$, pra kemi se argumenti x afrohet prej të djathtës kah 1, grafiku i funksionit afrohet deri te drejtëza $x = 1$, ndërsa asnjëherë pa e prek dhe poashtu $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$. Ngjashëm fitohet edhe për pjesën prej grafikut të lakores që është majtas prej drejtëzës $x = 1$ d.m.th., $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$.

Për drejtëzën $x = 1$ që e ka këtë veti, themi se është asimptotë vertikale të funksionit të dhënë (ajo është drejtëz paralele me boshtin y dhe prandaj quhet **asimptotë vertikale**).

Prej vizatimit për drejtëzn $y = 2$ mund të vërehen këto veti:

Kur argumenti x pranon vlera të mëdha $x \rightarrow +\infty$, grafiku i funksionit afrohet kah drejtëza $y = 2$ prej anës së sipërme po asnjëherë pa e prek. Kjo do të thotë se $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x-1} = 2$. Ngjashëm, fitohet edhe kur $x \rightarrow -\infty$, d.m.th., $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x-1} = 2$.

Për drejtëzën $y = 2$ themi se është **asimptotë horizontale**. Ajo është paralele me boshtin x .

Të fusim përkufizimin për asimptotë.

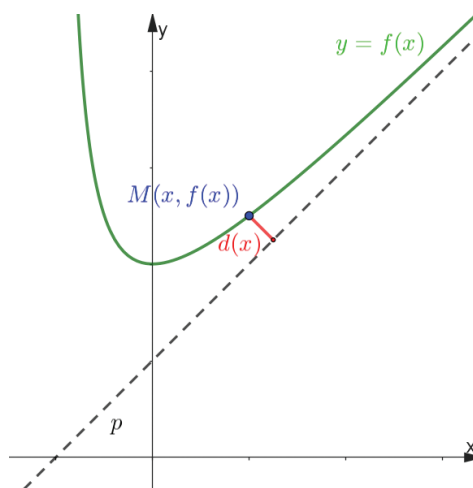
Përkufizimi 1. Grafiku i funksionit $y = f(x)$ le të ketë “degë” pikat e të cilës janë largua deri në pakufi. Nëse largesa $d(x)$ prej pikës së ndryshueshme $M(x, f(x))$, prej grafikut të funksionit deri te drejtëza e caktuar p tenton kah zero kur pika M pafundësisht largohet prej fillimit të koordinatave, d.m.th., $\lim_{x \rightarrow \infty} d(x) = 0$ atëherë për drejtëzën p themi se është **asimptotë** e lakores $y = f(x)$.

Varësisht prej pozitës së drejtëzës p te sistemi koordinativ, asimptota mund të jetë:

horizontale – nëse drejtëza p është paralele me boshtin x

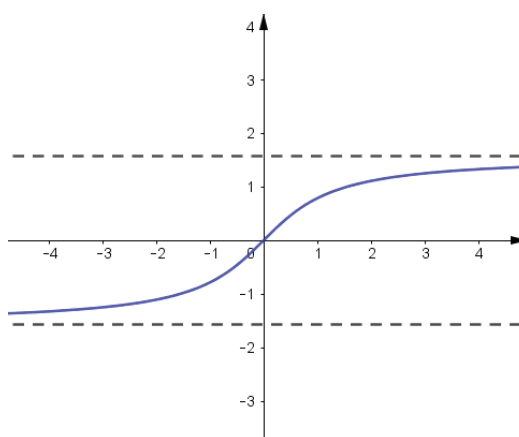
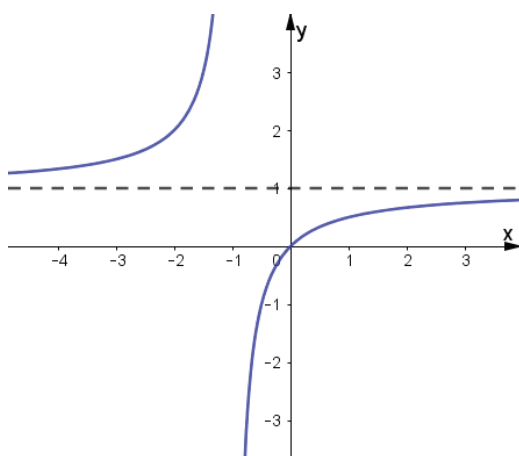
vertikale – nëse drejtëza p është paralele me boshtin y

e pjerrët – nëse drejtëza p nuk është paralele me asnjërën prej boshteve koordinative.



Përkufizimi 2. Le të jetë dhënë funksioni $y = f(x)$ i përkufizuar në bashkësinë $D_f = (a, +\infty)$, (ose $D_f = (-\infty, a)$). Nëse është i plotësuar kushti $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ (ose $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$), atëherë drejtëza $y = b$ është asimptotë horizontale për funksionin $y = f(x)$.

Disa pozita të mundshme të grafikut të funksionit në lidhje me asimptotat horizontale:



Afrimi i grafikut të funksionit të cilën asimptota horizontale mund të jetë prej anës së sipërme ose të poshtme të asimptotës.

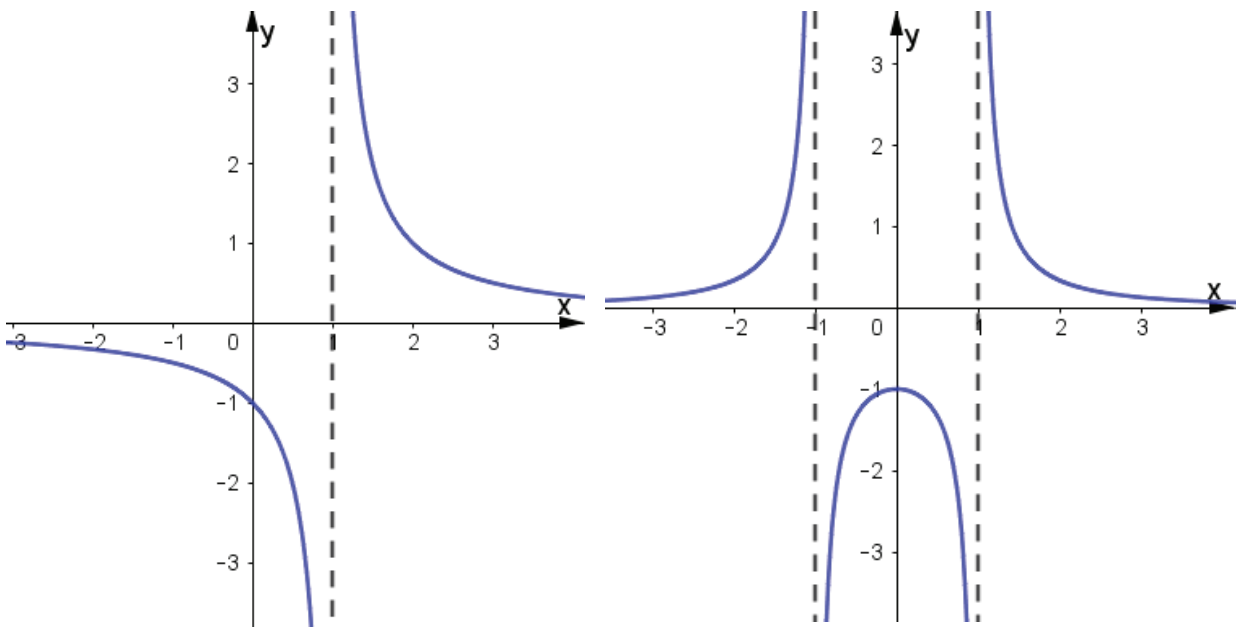
Për ta caktuar prej ku është afrimi i funksionit $y = f(x)$ kah asimptota horizontale $y = b$, e caktojmë shenjën e ndryshimit $f(x) - b$, varësisht prej argumentit x .

Nëse $f(x) - b > 0$, (kur x tenton kah $\pm\infty$), atëherë grafiku është mbi asimptotën horizontale,

Nëse $f(x) - b < 0$, (kur x tenton kah $\pm\infty$), atëherë grafiku është nën asimptotën horizontale.

Përkufizimi 3. Le të jetë dhënë funksioni $y = f(x)$ i përkufizuar në rrethinën e pikës a , përveç te pika a . Nëse është plotësuar ndonjëri prej kushteve $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ ose $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$, atëherë drejtëza $x = a$ është asimptotë vertikale për funksionin $y = f(x)$.

Disa pozita të mundshme të grafikut të funksionit në lidhje me asimptotat vertikale:



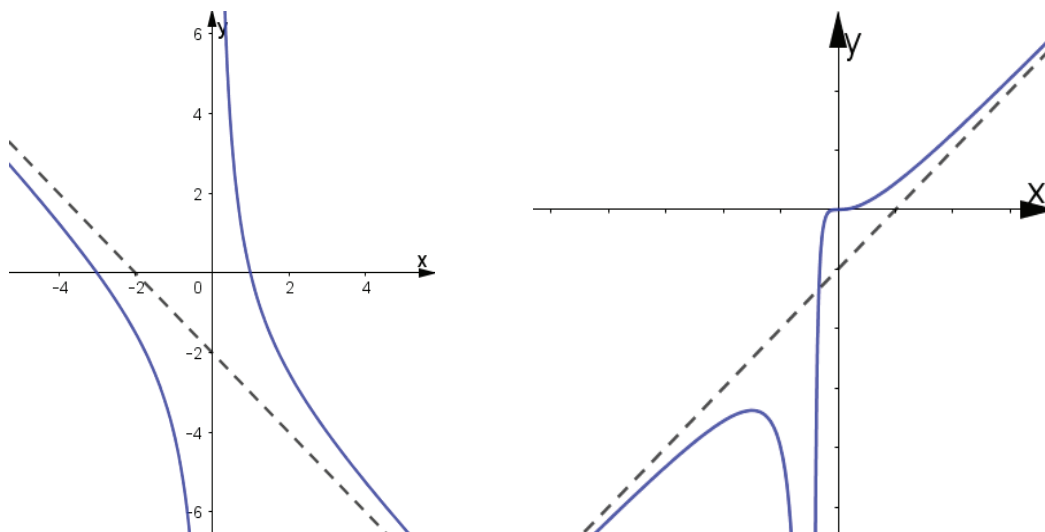
Varësisht prej zgjidhjes që fitohet $+\infty$ ose $-\infty$ caktohet afrimi i funksionit deri te asimptota.

Nëse zgjidhja është $+\infty$, atëherë funksioni afrohet prej anës së sipërme dhe atë prej të djathtës nëse $x \rightarrow a^+$ ose prej të majtës nëse $x \rightarrow a^-$.

Nëse zgjidhja është $-\infty$, atëherë funksioni afrohet prej anës së poshtme dhe atë prej të djathtës nëse $x \rightarrow a^+$ ose prej të majtës nëse $x \rightarrow a^-$.

Përkufizimi 4. Nëse drejtëza $y = kx + n$, $k \neq 0$ është **asimptotë e pjerrët** për funksionin $y = f(x)$, atëherë numrat k dhe n janë caktuar me formulat $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ dhe $n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx)$.

Disa pozita të mundshme të grafikut të funksionit në lidhje me asimptotën e pjerrët:



Afrimi i grafikut të funksionit kah asimptota e pjerrët mund të jetë ana e sipërme ose e poshtme e asimptotës.

Për ta caktuar prej ku është afrimi i funksionit $y = f(x)$ kah asimptota e pjerrët $y = kx + n$, e cakton shenjën e ndryshimit $f(x) - (kx + n)$, varësisht prej argumentit x .

Nëse $f(x) - (kx + n) > 0$, (kur x tenton kah $\pm\infty$), atëherë grafiku është mbi asimptotën e pjerrët,

Nëse $f(x) - (kx + n) < 0$, (kur x tenton kah $\pm\infty$), atëherë grafiku është nën asimptotën e pjerrët

Shembulli 2. Të caktohen asimptotat për funksionin $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$.

Zgjidhje: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ d.m.th., funksioni është përkufizuar në intervalin $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

1) Vlera kritike është $x = 1$, në të cilën funksioni mund të ketë asimptotë vertikale.

$$\text{Të njehsojmë } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x-1} =$$

Vlerën kufitare të majtë do ta gjejmë nëse fusim zëvendësimin $x = 1 - h$, ku $h > 0$ dhe $h \rightarrow 0$. Kemi:

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1-h+1}{1-h-1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2-h}{-h} = -\infty$$

$$\text{Të njehsojmë } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} =$$

Vlerën kufitare të djathtë do ta gjejmë nëse fusim zëvendësimin $x = 1 + h$, ku $h > 0$ dhe $h \rightarrow 0$. Kemi:

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1+h+1}{1+h-1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2+h}{h} = +\infty$$

Pasi për zgjidhje kemi $\pm\infty$, vijon, asimptota vertikale është drejtëza $x = -1$, ku grafiku prej të djathtës afrohet prej anës së sipërme, ndërsa prej të majtës prej anës së poshtme.

$$2) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{x \left(1 - \frac{1}{x} \right)} = 1,$$

Pasi për zgjidhje kemi 1, vijon se drejtëza $y = 1$ është asimptotë horizontale.

Se si sillet grafiku i funksionit në lidhje me asimptotën horizontale?

E njehsojmë ndryshimin:

$$f(x) - y = \frac{x+1}{x-1} - 1 = \frac{x+1-(x-1)}{x-1} = \frac{2}{x-1}$$

E caktojmë shenjën e tij në lidhje me argumentin x .

Pasi $\frac{2}{x-1} > 0$ për $x > 1$, vijon lakorja është mbi asimptotën për $x > 1$, ndërsa pasi $\frac{2}{x-1} < 0$ për $x < 1$, vijon lakorja është nën asimptotën $x < 1$.

$$3) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x+1}{x-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{x^2-x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} \right)} = 0,$$

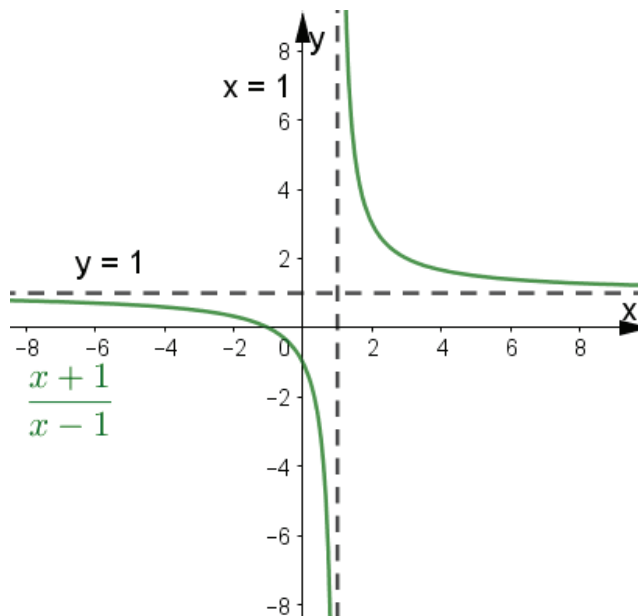
Pasi $k = 0$, vijon funksioni nuk ka asimptotë të pjerrët.

Vërejtje: Nëse $k = 0$ ose $k = \pm\infty$, ose $n = \pm\infty$, atëherë funksioni nuk ka asimptotë të pjerrët.

Nëse $k = 0$ dhe $n \neq \pm\infty$, atëherë fitohet asimptota horizontale $y = 0x + n$ d.m.th., $y = n$.

Për të vizatuar drejtë grafikun e funksioneve është mire kur të caktohet asimptota e funksionit të caktohet edhe afrimi i grafikut të funksionit deri te asimptotat.

Grafikisht të paraqitur asimptotat e funksionit $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$:



Shembulli 3. Të caktohen asimptotat për funksionin $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x + 1}$.

Zgjidhje: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ d.m.th., funksioni është përkufizuar në intervalin $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

1) Vlerat kritike ku funksioni nuk është përkufizuar është $x = -1$, pra drejtëza me barazimin $x = -1$ është kandidat i mundshëm për asimptotë vertikale. Kon trollojmë:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 2x + 3}{x + 1} =$$

(Vlerën kufitare të majtë do ta gjejmë, nëse e fusim zëvendësimin $x = -1 - h$, ku $h > 0$ dhe $h \rightarrow 0$. Kemi

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-1-h)^2 + 2(-1-h) + 3}{-1-h+1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2+h^2}{-h} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 2x + 3}{x + 1} =$$

(Vlerën kufitare të djathtë do ta gjejmë, nëse e fusim zëvendësimin $x = -1 + h$, ku $h > 0$ dhe $h \rightarrow 0$. Kemi

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-1+h)^2 + 2(-1+h) + 3}{-1+h+1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2+h^2}{h} = +\infty$$

Vijon, asimptota vertikale është drejtëz $x = -1$, ku grafiku prej të djathtës afrohet prej anës së sipërme, ndërsa prej të majtës prej poshtë.

$$2) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 2x + 3}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} \right)}{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = \pm\infty,$$

Funksioni nuk ka asimptotë horizontale.

$$3) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x^2 + 2x + 3}{x + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = 1,$$

Funksioni ka asimptotë të pjerrët me koeficient $k = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 3}{x + 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 2x + 3 - x^2 - x}{x + 1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x + 3}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x \left(1 + \frac{3}{x} \right)}{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = 1,$$

E gjetëm edhe koeficientin e dytë $n = 1$.

Kemi, drejtëzën $y = x + 1$ është asimptota e pjerrët.

Se si sillet grafiku i funksionit në lidhje me asimptotën e pjerrët?

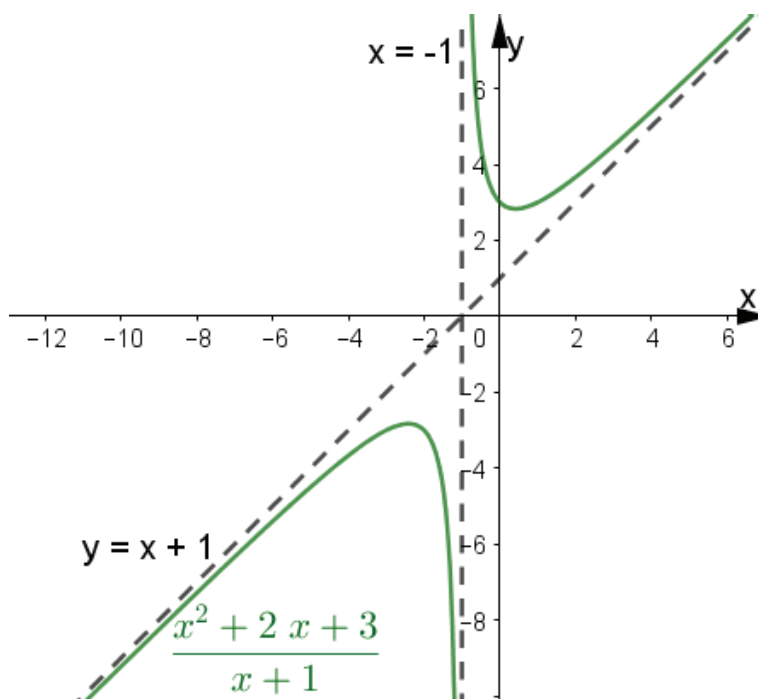
E njehsojmë ndryshimin:

$$f(x) - y = \frac{x^2 + 2x + 3}{x + 1} - (x + 1) = \frac{x^2 + 2x + 3 - (x + 1)^2}{x + 1} = \frac{2}{x + 1}$$

E caktojmë shenjën e tij në lidhje me argumentin x .

Pasi $\frac{2}{x + 1} > 0$ dhe $x > -1$, vijon lakorja është mbi asimptotën për $x > -1$, ndërsa pasi $\frac{2}{x + 1} < 0$ për $x < -1$, vijon lakorja është nën asimptotën.

Grafikisht të paraqitur asimptotat e funksionit



Detyra për ushtrime:

Detyra: Gjeji asimptotat të këtyre funksioneve:

$$1) f(x) = \frac{x+1}{x}$$

$$2) f(x) = \frac{x-3}{x+4}$$

$$3) f(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

$$4) f(x) = \frac{x^2 + 5x - 1}{x - 2}$$

$$5) f(x) = 2 - \frac{1}{x^2}$$

$$6) f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 3x + 2}$$

$$7) f(x) = x + 1 + \frac{1}{x^2}$$

$$8) f(x) = \frac{x^3}{4 - x^2}$$

$$9) f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$10) f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2}}$$

$$11) f(x) = \frac{x^3}{3(1+x^2)}$$

$$12) f(x) = x \cdot e^{-x}$$

$$13) f(x) = 2^{x+1} - 2$$

$$14) f(x) = \frac{1}{1 + e^x}$$

$$15) f(x) = \frac{e^x}{x^2 - 4}$$

4. KUFIRI I FUNKSIONEVE ELEMENTARE. ASIMPTOTAT E GRAFIKËVE TË FUNKSIONEVE ELEMENTARE

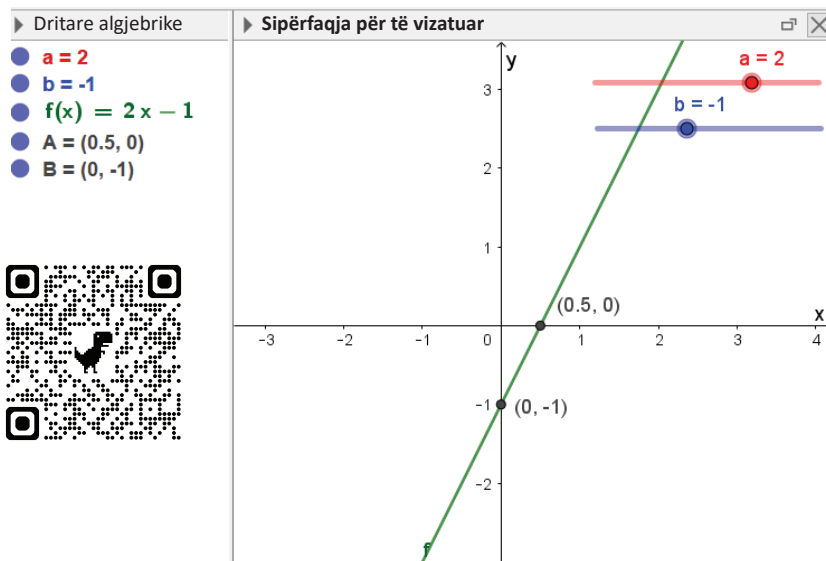
Te njësia modulare paraprake u përkujtuam për funksionet elementare. Në këtë pjesë do të shqyrtojmë grafikët dhe do të caktojmë vlerën kufitare dhe asimptotat e disa funksioneve elementare.

Së pari do të shqyrtojmë karakteristikat e funksioneve polinomale, lineare dhe katrore.

Funksioni linear

Funksioni $f(x) = ax + b$ quhet funksion linear. Fusha e përkufizimit është bashkësia e numrave realë d.m.th. $D_f = \mathbb{R}$

Është dhënë shembull për funksionin linear me koeficient a dhe b të cilët te apleti i dhënë në Geogebra janë vlerat prej rrëshqitësve a dhe b .



<https://www.geogebra.org/m/d3uummybd>

T'i zhvendosim vlerat e rrëshqitësve dhe të vërejmë. Çka vlen për funksionet lineare?

Nëse $a > 0$ atëherë $\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax + b) = +\infty$ dhe $\lim_{x \rightarrow -\infty} (ax + b) = -\infty$. Funksioni nuk ka asimptota.

Nëse $a < 0$ atëherë $\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax + b) = -\infty$ dhe $\lim_{x \rightarrow -\infty} (ax + b) = +\infty$. Funksioni nuk ka asimptota.

Shembulli 1. Grafikisht të paraqitur funksionet:

$$\text{a) } f(x) = 2x - 1 \quad \text{b) } g(x) = -\frac{1}{2}x + 2$$

Të caktohet vlera kufitare dhe asimptotat.

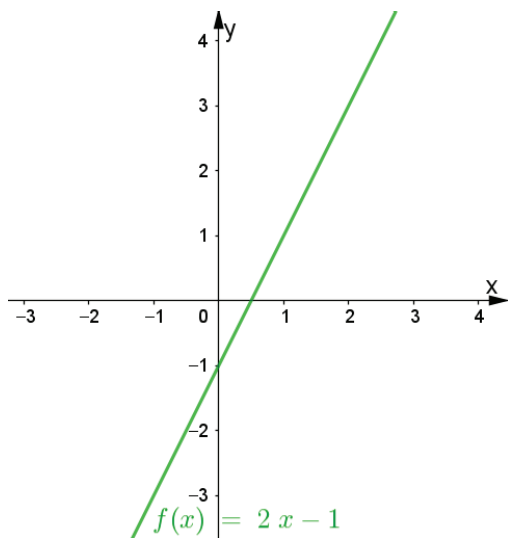
Zgjidhje:

a) $f(x) = 2x - 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 1) = -\infty$$

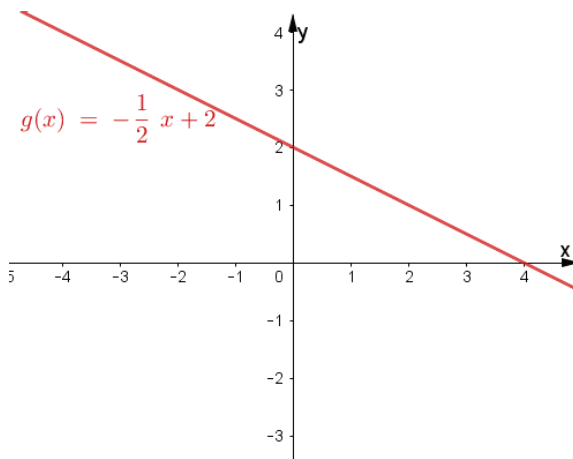
Funksionet nuk kanë asimptota.



b) $g(x) = -\frac{1}{2}x + 2$

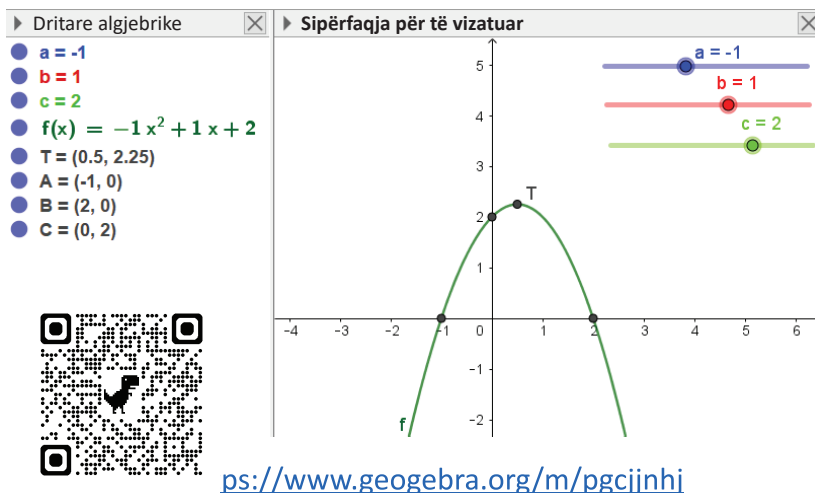
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}x + 2 \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2}x + 2 \right) = +\infty$$

**Funksioni katror**

Funksioni $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ quhet funksion katror. Fusha e përkufizimit është bashkësia e numrave realë d.m.th., $D_f = R$

Është dhënë shembull të funksionit katror me koeficientët a , b dhe c , të cilët te apleti i dhënë në Geogebra janë vlerat prej rrëshqitësve për a , b dhe c .



[ps://www.geogebra.org/m/pgcijnhi](https://www.geogebra.org/m/pgcijnhi)

T'i zhvendosim vlerat te rrëshqitësit dhe të vërejmë. Çka vlen për funksionin katror?

Nëse $a > 0$ atëherë $\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax^2 + bx + c) = +\infty$ dhe $\lim_{x \rightarrow -\infty} (ax^2 + bx + c) = +\infty$. Funksioni nuk ka asimptota.

Nëse $a < 0$ atëherë $\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax^2 + bx + c) = -\infty$ dhe $\lim_{x \rightarrow -\infty} (ax^2 + bx + c) = -\infty$. Funksioni nuk ka asimptota.

Shembulli 2. Grafikisht janë paraqitur funksionet:

a) $f(x) = x^2 + 2x - 1$

b) $g(x) = -2x^2 - x + 3$

Të caktohet vlera kufitare te pikat e pafundshme dhe asimptotat e mundshme.

Zgjidhje:

a) $f(x) = x^2 + 2x - 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2x - 1) = +\infty$$

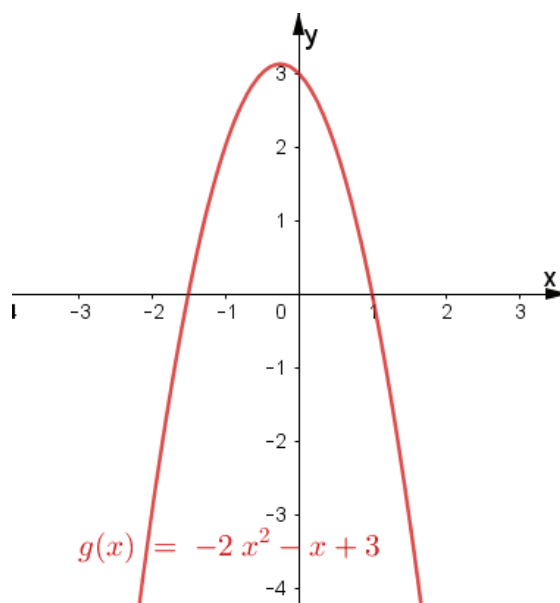
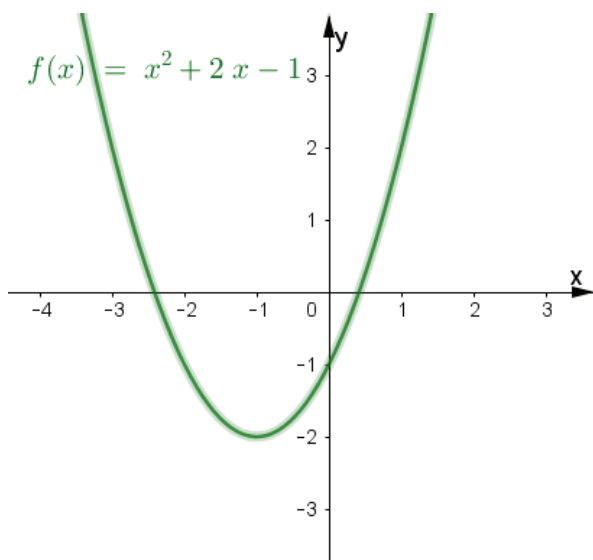
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 2x - 1) = +\infty$$

b) $g(x) = -2x^2 - x + 3$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^2 - x + 3) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^2 - x + 3) = -\infty$$

Funksionet nuk kanë asimptota.



Funksioni i fuqisë

Do ta shqyrtojmë funksionin fuqi me eksponent -1 dhe $\frac{1}{2}$.

Shembulli 3. Funksioni $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$ quhet funksion fuqi me eksponent numër i plotë. Fusha e përkufizimit është $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Të caktohet vlera kufitare për disa vlera karakteristike dhe t'i caktojmë asimptotat.

Zgjidhje: Le të jetë dhënë funksioni $f(x) = \frac{1}{x}$ dhe $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. T'i caktojmë këto vlera ekstreme:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

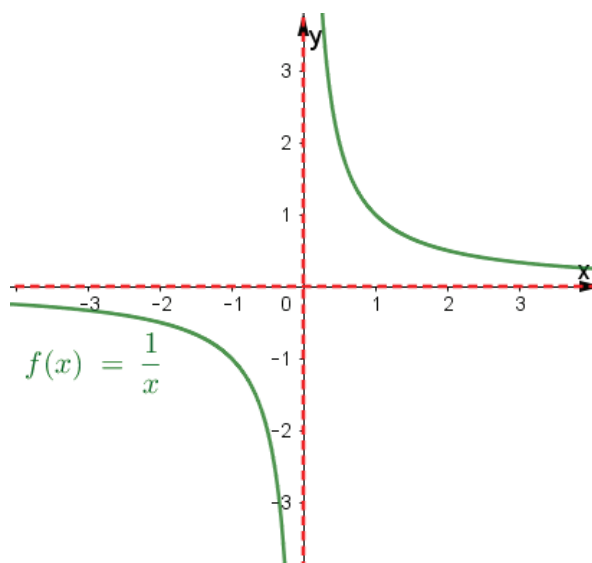
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{0-h} = -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} = -\infty,$$

(fusim zëvendësim $x = 0 - h$, $h > 0$ dhe $h \rightarrow 0$)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{0+h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} = +\infty,$$

(fusim zëvendësim $x = 0 + h$, $h > 0$ dhe $h \rightarrow 0$)



Prej dy vlerave kufitare vijon funksioni që ka asimptotë horizontale $y = 0$, ndërsa prej vlerës kufitare të tretës dhe të katër vijon funksioni të ketë asimptotë vertikale $x = 0$.

Shembulli 4. Funksioni $f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$, quhet funksion fuqi me eksponent numër racional. Fusha e përkufizimit është $D_f = [0, +\infty)$.

Të caktojmë vlerat kufitare për disa vlera karakteristike dhe të caktojmë asimptotat.

Zgjidhje: Le të jetë dhënë funksioni $f(x) = \sqrt{x}$ dhe $D_f = [0, +\infty)$. T'i caktojmë këto vlera kufitare:

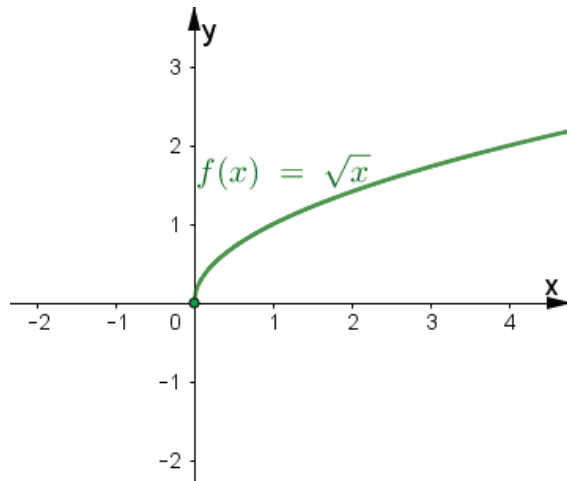
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ nuk mund të caktohet.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{0+h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{h} = 0,$$

(fusim zëvendësim $x = 0 + h$, $h > 0$ dhe $h \rightarrow 0$)

Funksioni nuk ka asimptota.



Funksioni eksponencial

Funksioni $f(x) = a^x$ për $a \neq 1, a > 0$ quhet funksion eksponencial. Fusha e përkufizimit është $D_f = \mathbb{R}$.

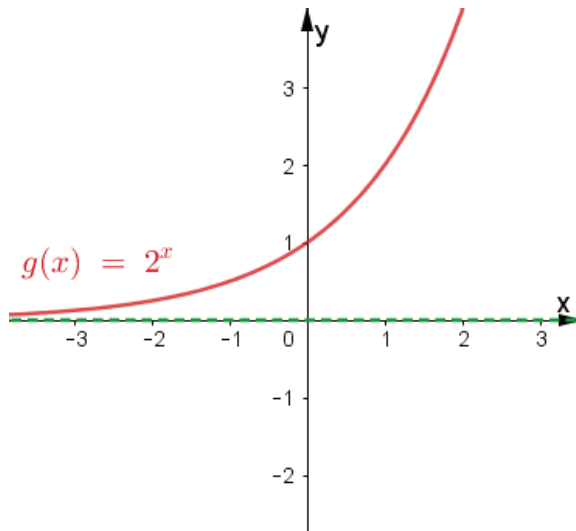
Shembulli 5. Funksioni $f(x) = 2^x$, është funksion eksponencial. Fusha e përkufizimit është $D_f = \mathbb{R}$.

Të caktojmë vlerat kufitare për disa vlera karakteristike dhe të caktojmë asimptotat.

Zgjidhje: Le të jetë dhënë funksioni $f(x) = 2^x$ dhe $D_f = \mathbb{R}$. T'i caktojmë këto vlera kufitare:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{\infty}} = 0$$



Funksioni ka asimptotë horizontale $y = 0$, ndërsa vetëm prej anës së majtë kur $x \rightarrow -\infty$.

Funksioni logaritmik

Funksioni $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ quhet funksion logaritmik. Fusha e përkufizimit është $D_f = (0, +\infty)$.

Shembulli 6. Funksioni $g(x) = \lg x$, është funksion logaritmik karakteristik me bazë 10. Fusha e përkufizimit është $D_g = (0, +\infty)$.

Të caktojmë vlerat kufitare për disa vlera karakteristike dhe t'i caktojmë asimptotat.

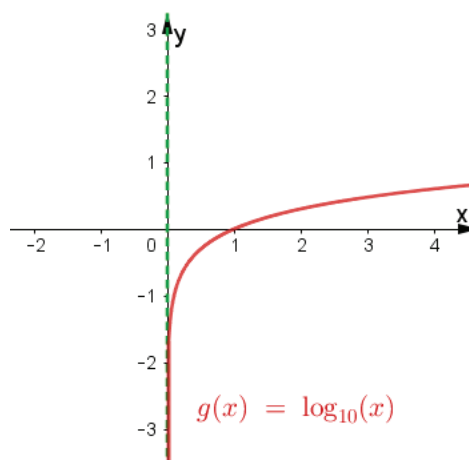
Zgjidhje: Le të jetë dhënë funksioni $g(x) = \lg x$ dhe $D_g = (0, +\infty)$. T'i caktojmë këto vlera kufitare:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \lg x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) \text{ nuk mund të caktohet.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \lg x = \lim_{h \rightarrow 0} \lg(0+h) = \lim_{h \rightarrow 0} \lg(h) = -\infty$$

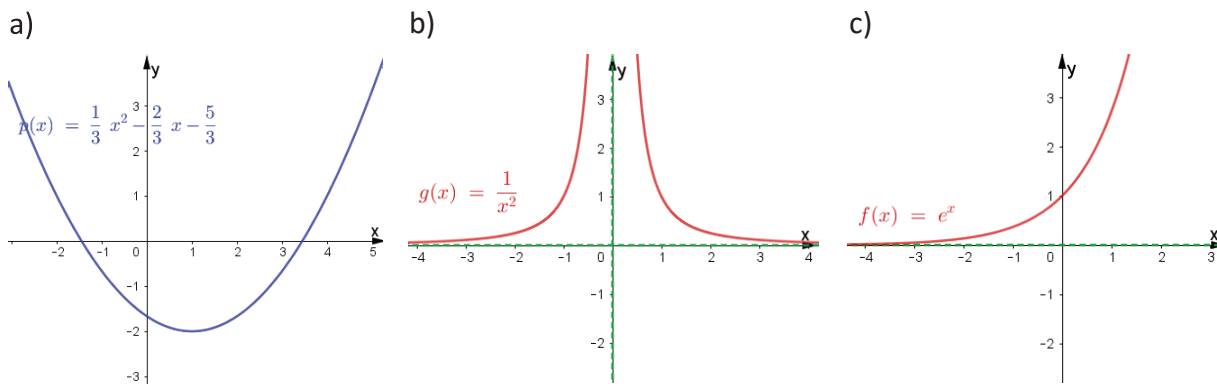
(fusim zëvendësim $x = 0 + h$, $h > 0$ dhe $h \rightarrow 0$)



Funksioni ka asimptotë vertikale $x = 0$, ndërsa vetëm prej anës së djathtë të drejtëzës.

Detyra për ushtrime:

1. Të caktohen asimptotat e funksioneve të dhëna me grafikët e tyre.



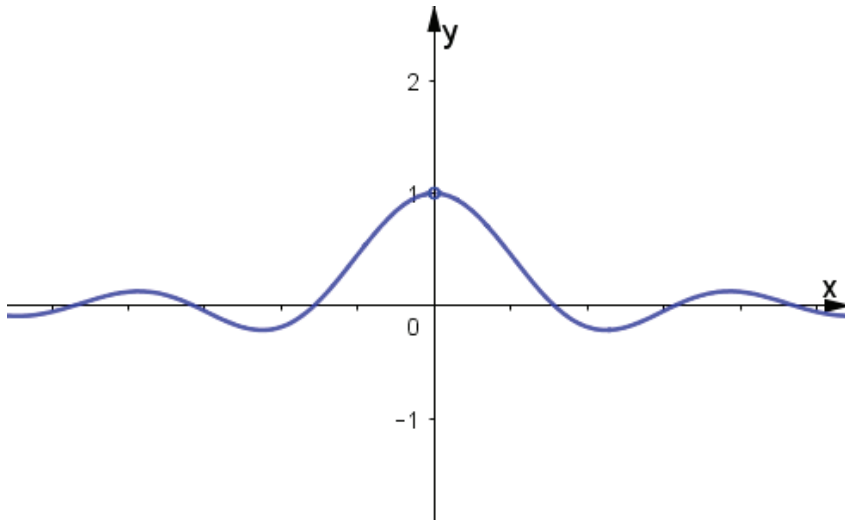
2. Të caktohen asimptotat e funksioneve

- a) $f(x) = -3x + \frac{1}{4}$ b) $f(x) = 4x + 5$ c) $f(x) = x^2 - 5x + 6$ ç) $f(x) = -x^2 + 3x$ dh) $f(x) = \frac{1}{x^3}$
e) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ f) $f(x) = \ln x$ g) $f(x) = -\lg x$ i) $f(x) = e^{-x}$ h) $f(x) = 3^x$

5. VLERA KUFITARE SPECIALE

Te kjo njësi modulare do të caktojme vlerat kufitare të disa funksioneve të cilat do t'i zbatojmë gjatë njehsimit të vlerës kufitare të funksioneve të tjera.

Ta shqyrtojmë funksionin $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Fusha e përkufizimit është $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ pra funksioni nuk është përkufizuar për $x = 0$. Grafikisht i paraqitur funksioni është:



Të caktojme cilat janë vlerat që i pranp funksioni nëse vlerat e argumentit afrohen kah 0 nëpërmjet vargut prej numrave pozitiv. Ta paraqesim tabelarisht

x	1	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	...
$f(x)$	0.84147	0.99833	0.99998	0.99999	0.99999	0.99999	...

Kemi se, nëse vlerat e argumentit afrohen deri te 0, atëherë vlerat e funksionit afrohen kah 1.

Funksioni $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ është çift, ndërsa mund të përfundojmë edhe se, nëse vlerat e argumentit afrohen kah 0 prej të majtës, atëherë edhe vlera e funksionit afrohet kah 1.

Vërtetohet se për çdo varg (x_n) , $x_n \neq 0$ dhe $n \in \mathbb{N}$, që konvergjon kah 0, vargu përkatës $\left(\frac{\sin(x_n)}{x_n}\right)$ konvergjon kah 1.

Atëherë, shkruajmë vlerën kufitare:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Shembulli 1. T'i caktojmë vlerat kufitare:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}$$

$$\text{Zgjidhje: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x} \cdot \frac{4}{4} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} = 4 \cdot 1 = 4$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$$

$$\text{Zgjidhje: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 2x}{x}}{\frac{\sin 3x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 2x}{x} \cdot \frac{2}{2}}{\frac{\sin 3x}{x} \cdot \frac{3}{3}} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{\sin 3x}{3x}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1} = \frac{2}{3}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 5x}{\sin x}$$

$$\text{Zgjidhje: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 5x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{\sin x} - \frac{5x}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - 5 \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} 1 - 5 \cdot \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}} = 1 - 5 \cdot \frac{1}{1} = 1 - 5 = -4.$$

Shembulli 2. T'i caktojmë vlerat kufitare:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$$

$$\text{Zgjidhje: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \cos x} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$$

$$\text{Zgjidhje: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = 2 \cdot 1^2 = 2$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin x}$$

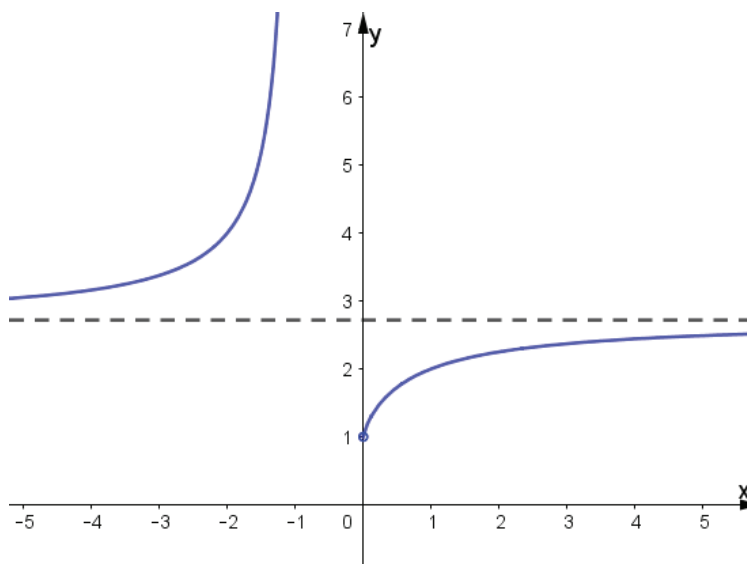
$$\text{Zgjidhje: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 5x}{\cos 5x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\cos 5x \cdot \sin x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 5x}{x} \cdot \frac{x}{\cos 5x \cdot \sin x}}{\frac{\sin x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 5x}{x} \cdot \frac{x}{5} \cdot \frac{5}{\sin x}}{\frac{\sin x}{x}} = 5 \cdot \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \cos 5x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}} = 5 \cdot \frac{1}{1 \cdot 1} = 5$$

Vërejtje: Vlen edhe kjo vlerë kufitare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$, pasi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Ta shqyrtojmë funksionin $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. Grafikisht funksioni është paraqitur:



Na intereson vallë ky funksion ka kufi iur x tenton kah ∞ . Të caktojmë cilat vlera që i pranon funksioni nëse vlerat e argumentit janë vargu prej numrave natyrorë që në pafundësi rritet.

x	1	10	100	1000	10000	100000	...
$f(x)$	2	2.5937	2.7048	2.7169	2.7181	2.7183	...

Kemi se, nëse vlerat e argumentit afrohen kah ∞ , atëherë vlerat e funksionit afrohen kah e .

Vërtetohet se për çdo varg (x_n) , $x_n \neq 0$ dhe $n \in \mathbb{N}$, që konvergjon kah ∞ , vargu përkatës $\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n}$ konvergjon kah e .

Atëherë, e shkruajmë vlerën kufitare:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Vërejtje: Nëse te formula $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ zëvendësojmë $\frac{1}{x} = t$, atëherë prej $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$, vijon $t \rightarrow 0$ dhe mund të shkruajmë formulën $\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$. Nëse përsëri zëvendësojmë vetëm për ndryshoren me x , e kemi formulën $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Shembulli 3. T'i caktojmë vlerat kufitare:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x}$

Zgjidhje: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x} = e$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4x+1}\right)^{2x-2}$

Zgjidhje: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4x+1}\right)^{2x-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4x+1}\right)^{(4x+1) \frac{1}{4x+1} (2x-2)} =$

$$= \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4x+1}\right)^{4x+1} \right]^{\frac{2x-2}{4x+1}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-2}{4x+1}} = e^{\frac{1}{2}}$$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-3}\right)^x$

Zgjidhje: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-3} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x+2}{x-3} - 1 \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x+2-x+3}{x-3} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x-3} \right)^x =$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x-3}{5}} \right)^{\frac{x-3}{5} \cdot \frac{5}{x-3} x} = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x-3}{5}} \right)^{\frac{x-3}{5}} \right]^{\frac{5x}{x-3}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x}{x-3}} = e^5$$

Shembulli 4. Të vërtetojmë se $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ dhe $a > 0$, $a \neq 1$.

Zgjidhje: Nëse fusim zëvendësimin $a^x - 1 = t$ dhe $a^x = 1 + t$ atëherë $x = \frac{\ln(1+t)}{\ln a}$ vijon edhe $t \rightarrow 0$. Me zëvendësimin të shprehja kemi:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\frac{\ln(1+t)}{\ln a}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln a}{\frac{1}{t} \ln(1+t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln a}{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}} = \frac{\ln a}{\ln e} = \frac{\ln a}{1} = \ln a$$

Detyra për ushtrime:

1. Të caktohen këto vlera kufitare:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 7x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} 2x}$

2. Të caktohen këto vlera kufitare:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 2x}{1 - \cos x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} ax \cdot \operatorname{ctg} bx)$

3. Të caktohen këto vlera kufitare:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{x-1}$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{-3x+2}$

4. Të caktohen këto vlera kufitare:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{3x} \right)^{x+2}$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{x+3}$

DETYRA PËR PËRSËRITJE DHE ZBATIM PRAKTIK:

1. Cakto këto vlera kufitare:

a) $\lim_{x \rightarrow -2} (x^3 - 5x + 7)$

b) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{5x - 7}{3x + 2}$

2. Gjeje kufirin e majtë dhe të djathtë të funksionit:

a) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ në $x_0 = 1$

b) $f(x) = \frac{x+4}{x+3}$ në $x_0 = -3$

3. Cakto vlerat kufitare (të llojit $\frac{0}{0}$):

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{3x - 9}$

ç) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{2x^2 + 4x - 16}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1-x}}$

dh) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$

e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{1 - \sqrt{x-1}}$

f) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{x^2 + x}$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x}$

4. Cakto vlerat kufitare (të llojit $\infty - \infty$):

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{4x^2}{x^2 - 1} - \frac{2}{x-1} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{4}{x^2 - 4} \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \left(\frac{4x+3}{3x-1} - \frac{12x^2+7x+5}{9x^2-1} \right)$

5. Cakto vlerat kufitare (të llojit $\frac{\infty}{\infty}$):

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 7x + 4}{3x^3 + 3x^2 - x}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 2x - x^3}{x^3 + 9}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}}{\sqrt{x^2 + 4x - 1}}$

6. Cakto vlerat kufitare të funksioneve duke shfrytëzuar vlerat kufitare speciale:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$	$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
---	---	--	--

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{3x^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sin 4x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 5x}$

$$\text{ç)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2-1}$$

$$\text{d)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} 2x}$$

$$\text{dh)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x}\right)^{x+2}$$

$$\text{e)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{2x+4}$$

$$\text{f)} \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\text{g)} \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}}$$

7. Vërteto vijueshmërinë e funksioneve:

$$\text{a)} f(x) = \frac{1}{x^2+5} \text{ në } x=3 \quad \text{b)} f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-3x+2} \text{ te fusha e tij e përkufizimit,}$$

$$\text{c)} f(x) = \frac{2x-1}{x^2-4} \text{ te fusha e tij e përkufizimit.}$$

8. Gjeji pikat e pavijimit të funksionit

$$f(x) = \frac{1}{x^2-x-6}$$

a) Në cilat pika është pika e pavijimit të funksionit,

b) Gjeji intervalet e vijueshmërisë,

c) Shqyrto ndryshimin e vlerës së funksionit prej të majtës nga e djathta te pikat te të cilat funksioni është i pavijueshëm,

ç) Prej sa degëve përbëhet grafiku i funksionit?

Për zgjidhje më të lehtë të detyrës, mund të pari të vizatosh grafikun në Geogebra.

9. Gjeji asimptotat e ktyre funksioneve:

$$\text{a)} f(x) = \frac{3x}{x+1}$$

$$\text{b)} f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$$

$$\text{c)} f(x) = \frac{2x^2-1}{x^2}$$

$$\text{ç)} f(x) = \frac{2x-x^3}{x^2+4}$$

10. Në postë pranohen paketa deri në 4 kilogram peshë. Shërbimet postale për paketën njehsohet sipas kësaj tablele:

Masa m në kilogram	Taksa postare në denarë
$0 < m < 1$	100
$1 \leq m < 2$	120
$2 \leq m < 3$	140
$3 \leq m < 4$	180

Në këtë mënyrë shërbimet postare të dhëna është funksion prej peshës.

Ta shënojmë funksionin me f , d.m.th. $P = f(m)$.

a) Cakto $f(0,75)$, $f(1)$ dhe $f(3,5)$

b) Cakto $f(5)$

c) Cila është fusha e përkufizimit të funksionit?

ç) Skico grafikun e funksionit.

d) Vallë funksioni ka pika të pavijimit?

11. Të shqyrtohet vijueshmëria e funksionit $f(x) = \begin{cases} 2, & x < 0 \\ x+2, & x \geq 0 \end{cases}$.
Skico grafikun e funksionit.

12. Të shqyrtohet vijueshmëria e funksionit $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \\ x+1, & 1 < x \leq 4 \end{cases}$.

Skico grafikun e funksionit.

13. A mund të caktohet numri real a ashtu që funksioni $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1, & x > 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{cases}$ të jetë i vijueshëm?

14. Është dhënë funksioni $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$.

Gjeje vlerën e parametrin a , ashtu që funksioni është i vijueshëm për të gjithë numrat realë.

15. Është dhënë funksioni $f(x) = \begin{cases} 3x - \sqrt{x^2 - 4}, & |x| \geq 2 \\ ax, & |x| < 2 \end{cases}$.

Gjeje vlerën e parametrin a , ashtu që funksioni është i vijueshëm për të gjithë numrat realë.

Konstrukto grafikun në Geogebra për të vërtetuar rezultatin tuaj.

NJËSIA MODULARE 4

DERIVATI I FUNKSIONIT

Në këtë njësi modulare do të mësohen:

Përkufizimi i derivatit të funksionit te pika

Interpretimi gjeometrik i derivatit

Caktimi i derivatit sipas përkufizimit

Derivatet tabelare prej funksioneve elementare themelore

Derivati prej shumë, ndryshimit, prodhimit dhe herësit

Koncepti për funksion të përbërë

Derivati prej funksionit të përbërë

Derivat logaritmik

Zbatimi i derivatit për caktimin e barazimit të tangjentës dhe normales

Zbatimi i derivatit në fizikë

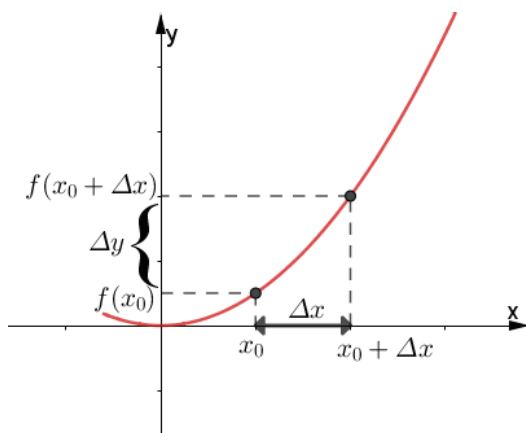
Zbatimi i derivatit për shqyrtimin e vijimit dhe grafikut të funksionit

Zbatimi i derivatit për zgjidhjen e problemeve prej ekstremeve

DERIVATI I FUNKSIONIT**1. PËRKUFIZIMI I DERIVATIT TË FUNKSIONIT TE PIKA**

Funksioni $y = f(x)$ le të jetë përcaktuar në D_f dhe le të jetë $x_0 \in D_f$. Për ndryshimin e dhënë Δx të argumentit x_0 e formojmë ndryshimin $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ dhe e quajmë rritje të funksionit $y = f(x)$.

Në vizatim është paraqitur rritja e argumentit Δx i rritjes së funksionit Δy .



Shembulli 1. Cakto rritjen e funksionit $f(x) = 2x^2$ në pikën $x_0 = 1$, nëse $\Delta x = 0, 2$.

Zgjidhje: Prej $\Delta x = 0, 2$ dhe $x_0 = 1$, mund të njehsojmë:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(1 + 0, 2) - f(1) = 2 \cdot 1, 2^2 - 2 \cdot 1^2 = 0, 88$$

Përkufizim: Nëse ekziston vlerë kufitare prej herësit të rritjes së funksionit dhe argumentit kur rritja e argumentit tenton kah 0, d.m.th., $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, atëherë ajo quhet **derivatek i funksionit** $y = f(x)$ në pikën $x = 0$ dhe shënohet me y' ose $f'(x_0)$.

Shënimi:
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Herisi $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ e paraqet **shpejtësinë mesatare të ndryshimit** të funksionit $y = f(x)$ kur x_0 do të ndryshon për Δx .

Operacioni me të cilin gjendet derivatiu $f'(x)$ i funksionit $f(x)$ quhet **diferencimi i funksionit** $f(x)$.

Vërejtje: Prej fizikës, derivati e paraqet shpejtësinë momentale të funksionit në rrugën $y = f(x)$ në kohën (pika) x_0 .

Për shkak të shënimit të thjeshtë, në vend të çfarëdo pikë me abshisën x_0 do ta shënojmë vetëm me x .

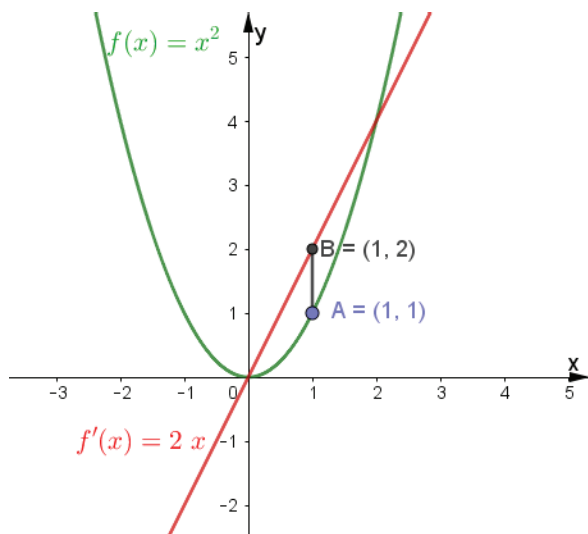
Shembulli 2. Të gjendet derivati i funksionit $f(x) = x^2$ në çfarëdo pikë x , ndërsa pastaj cakto derivatin në pikën me abshisë $x = 1$.

Zgjidhje: Prej përkufizimit për derivate vijon,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cancel{\Delta x}(2x + \Delta x) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x + 0 = 2x, \text{ d.m.th.}, \\ f'(x) &= (x^2)' = 2x. \end{aligned}$$

Për $x = 1$, kemi $f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$.

Grafikisht t'i paraqesim funksionet:



Grafiku i funksionit $f(x) = x^2$ është dhënë me ngjyrë të gjelbër.

Derivati i funksionit $f'(x) = 2x$ është me ngjyrë të kuqe.

Për $x = 1$, kemi $f'(1) = 2$. Pika $B(1,2)$ shtrihet te normalja e tërhequr te pika $A(1,1)$ e funksionit.

$y(B)$ është vlera e derivatit të parë te pika me abshisë $x(A)$.

Çka paraqesin grafikisht pikat prej derivatit të funksionit?

Në mënyrë plotësuese do të shqyrtojmë më poshtë.

Shembulli 3. Të gjendet derivati sipas përkufizimit të $f(x) = 2x^2$ në çfarëdo pikë me abshisë $x = 1$.

Zgjidhje: Prej përkufizimit të derivatit vijon,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(x + \Delta x)^2 - 2x^2}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 2x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4x\Delta x + 2(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(4x + 2\Delta x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\Delta x}(4x + 2\Delta x)}{\cancel{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4x + 2\Delta x) = 4x + 0 = 4x, \text{ d.m.th.,} \\ f'(x) &= (2x^2)' = 4x. \end{aligned}$$

Për $x = 1$, kemi $f'(1) = 4 \cdot 1 = 4$

Shembulli 4. Të gjendet derivati i funksionit $f(x) = x^4$ në çfarëdo pikë x , ndërsa pastaj cakto derivatin në pikën me abshisë $x = -1$.

Zgjidhje: Prej përkufizimit të derivatit vijon,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^4 - x^4}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 4x^3\Delta x + 6x^2(\Delta x)^2 + 4x(\Delta x)^3 + (\Delta x)^4 - x^4}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4x^3\Delta x + 6x^2(\Delta x)^2 + 4x(\Delta x)^3 + (\Delta x)^4}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(4x^3 + 6x^2\Delta x + 4x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\Delta x}(4x^3 + 6x^2\Delta x + 4x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3)}{\cancel{\Delta x}} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4x^3 + 6x^2\Delta x + 4x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3) = 4x^3 + 0 + 0 + 0 = 4x^3, \text{ d.m.th.,} \\ f'(x) &= (x^4)' = 4x^3. \end{aligned}$$

Për $x = -1$, kemi $f'(-1) = 4 \cdot (-1)^3 = 4 \cdot (-1) = -4$

Shembulli 5. Të gjendet derivati i funksionit $f(x) = \sqrt{x}$ në çfarëdo pikë x , ndërsa pastaj cakto derivatin në pikën me abshisë $x = 4$.

Zgjidhje: Prej përkufizimit të derivatit vijon,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x + \Delta x})^2 - (\sqrt{x})^2}{\Delta x (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x} (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x + 0} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \text{ d.m.th.,} \\ f'(x) &= (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Për $x = 4$, kemi $f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$

Shembulli 6. Të gjendet derivati i funksionit $f(x) = \frac{1}{x}$ në çfarëdo pikë x , ndërsa $x \in D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ pastaj cakto derivatin në pikën me abshisë $x = 2$.

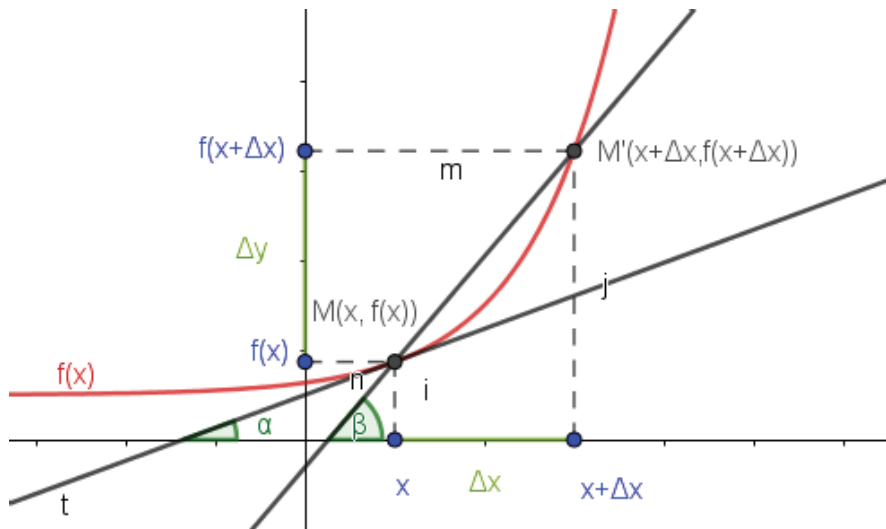
Zgjidhje: Prej përkufizimit të derivatit vijon,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{x - x - \Delta x}{(x + \Delta x)x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x (x + \Delta x)x} = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x} (x + \Delta x)x} = \\ &= - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(x + \Delta x)x} = - \frac{1}{(x + 0)x} = - \frac{1}{x^2}. \\ f'(x) &= \left(\frac{1}{x} \right)' = - \frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

Për $x = 2$, kemi $f'(2) = - \frac{1}{2^2} = - \frac{1}{4}$

Interpretimi gjeometrik i derivatit

Funksioni i dhënë $y = f(x)$ me grafikun e tij $M(x, y) = M(x, f(x))$ është pika prej funksionit. Le të jetë M' pika prej lakores me koordinata $M'(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$.



Këndi β është këndi që e formon drejtëza (sekanta) që kalon nëpër M dhe M' me boshtin x , ndërsa α është këndi që e formon tangjenta t e lakores së pikën M me boshtin x .

Prej $\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (prej trekëndëshit kënddrejtë me hipotenuzën $\overline{MM'}$ dhe këndin β te kulmi M), fitohet se vlera kufitare është

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha, \text{ d.m.th.,}$$

Derivati i funksionit $y = f(x)$ është koeficienti i drejtimit (mënjanimi) të tangjentës t të grafikut të funksionit në pikën M .

Për funksionin $y = f(x)$ që ka derivate të fundshëm në pikën x , themi se është **diferenciabil** në pikën x . Nëse funksioni është diferenciabil në çdo pikë $x \in (a, b)$ atëherë themi se është **diferenciabile** në intervalin (a, b) .

Detyra për ushtrime:

1. Cakto rritjen e funksionit $y = f(x)$ në pikën x nëse rritja e argumentit është Δx , në këto detyra:

a) $f(x) = x$, $x = 2$ dhe $\Delta x = 0.5$

b) $f(x) = x^3$, $x = 3$ dhe $\Delta x = 0.1$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x = 1$ dhe $\Delta x = 0.01$

ç) $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $x = 1$ dhe $\Delta x = 0.2$

2. Duke shfrytëzuar përkufizimin e derivatit të funksionit gjeji derivatet e funksionit në çfarëdo pikë $x \in D_f$, ndërsa pastaj edhe te pika e dhënë me abshisë x .

a) $f(x) = 2x + 3$, për $x = -2$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ për $x = 1$

c) $f(x) = \sqrt{x+1}$ për $x = 3$

ç) $f(x) = x^3$ për $x = -1$

3. Duke shfrytëzuar përkufizimin e derivatit të funksionit gjeji derivatet e funksionit në çfarëdo pikë $x \in D_f$.

a) $f(x) = 5x + 1$,

b) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$,

c) $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$,

ç) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$.

4. Duke shfrytëzuar përkufizimin e derivatit të funksionit gjeji derivatet e funksionit në çfarëdo pikë $x \in D_f$, ndërsa pastaj edhe te pika e dhënë me abshisë x

a) $f(x) = 2^x$ për $x = 0$

b) $f(x) = \ln x$ për $x = e$

c) $f(x) = 1 + \sqrt{x+1}$ për $x = 3$

ç) $f(x) = \frac{2}{1-x^2}$ për $x = 0$

5. Trego këto funksione nuk ka derivate të fundshëm te pikat e dhëna:

a) $f(x) = \sqrt[3]{x-3}$ për $x = 3$

b) $f(x) = \sqrt[3]{8-x^3}$ për $x = 2$

c) $f(x) = \sqrt[5]{x^3}$ për $x = 0$

ç) $f(x) = \sqrt{x+1}$ për $x = -1$

2. CAKTIMI I DERIVATIT TË FUNKSIONEVE ELEMENTARE

Në vazhdim do t'i caktojmë derivatet e disa funksioneve elementare, ndërsa pastaj do të nxjerrim edhe disa rregulla për diferencim. Të njëjtat do t'i shfrytëzojmë për njehsimin e derivativve të funksioneve të përbëra.

Shembulli 1. Të caktohet derivati i funksionit konstant $f(x) = C$, $C = \text{const}$.

Zgjidhje: Prej përkufizimit për derivate vijon

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C - C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

Kemi $(C)' = 0$, për çdo konstante $C \in \mathbb{R}$.

Shembulli 2. Të caktohet derivati i funksionit fuqi $f(x) = x^n$ për $n \in \mathbb{N}$ dhe $x \in \mathbb{R}$.

Zgjidhje: Prej përkufizimit për derivate kemi,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} \Delta x + \binom{n}{2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \dots + \binom{n}{n} (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1} \Delta x + \binom{n}{2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{nx^{n-1} \Delta x + \binom{n}{2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x \left(nx^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} \Delta x + \dots + (\Delta x)^{n-1} \right)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(nx^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} \Delta x + \dots + (\Delta x)^{n-1} \right) = nx^{n-1} + 0 + \dots + 0 = nx^{n-1} \end{aligned}$$

Kemi $(x^n)' = nx^{n-1}$ për $n \in \mathbb{N}$ dhe $x \in \mathbb{R}$.

Duke e shfrytëzuar këtë formulë mund t'i vërtetojmë edhe këto formula të cilat i fituam paraprakisht se $(x)' = 1$, $(x^2)' = 2x$, $(x^3)' = 3x^2$, $(x^4)' = 4x^3$

Tregohet se formula mund të përdoret jo vetëm për $n \in \mathbb{N}$, ndërsa edhe ku treguesi është çfarëdo numër real.

Duke e shfrytëzuar këtë formulë mund t'i vërtetojmë edhe dy zgjidhjet prej shembullit 5 dhe shembullit 6 prej njësisë modulare paraprake,

$$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

Shembulli 3. Duke shfrytëzuar formulën për derivat $(x^n)' = nx^{n-1}$ të caktohet derivati i funksioneve:

a) $f(x) = x^5$, b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ për $x \neq 0$ c) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ për $x > 0$

Zgjidhje:

a) $(x^5)' = 5x^{5-1} = 5x^4$,

b) $\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2 \cdot x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$,

c) $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}.$

Shembulli 4. Ta caktojmë derivatin e funksionit logaritmik $f(x) = \log_a x$ për $x \in R^+$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Zgjidhje: Prej përkufizimit për derivate dhe vlera kufitare $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, vijon

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x} \cdot \frac{1}{x}} =$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \log_e a} = \frac{1}{x \ln a}$$

$$\text{Kemi } (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \text{ për } x \in R^+, a > 0, a \neq 1.$$

Nëse zëvendësojmë $a = e$, atëherë $\log_e x = \ln x$ dhe $\ln e = 1$ pra do të vlen kjo formulë $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Shembulli 5. Ta caktojmë derivatin e funksionit eksponencial $f(x) = a^x$ për $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Zgjidhje: Prej përkufizimit për derivate dhe vlera kufitare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$, (për $a > 0$) vijon:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^x a^{\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^x (a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \ln a \end{aligned}$$

Kemi $(a^x)' = a^x \ln a$ për $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Nëse zëvendësojmë $a = e$, atëherë $a^x = e^x$ dhe $\ln e = 1$ pra do të vlen kjo formulë $(e^x)' = e^x$.

Shembulli 6. Të caktohet derivati i funksionit $f(x) = \sin x$.

Zgjidhje: Prej përkufizimit për derivate dhe vlera kufitare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ vijon e

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} =$$

Me zbatimin e formulave trigonometrike $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ vijon se

$$\begin{aligned} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} \sin \frac{x + \Delta x - x}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \end{aligned}$$

$$= \cos(x + 0) \cdot 1 = \cos x$$

Kemi $(\sin x)' = \cos x$.

Shembulli 7. Të caktohet derivati i funksionit $f(x) = \cos x$

Zgjidhje: Prej përkufizimit për derivate dhe vlera kufitare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ vijon e

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} =$$

Me zbatimin e formulave trigonometrike $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ vijon se

$$\begin{aligned} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{x + \Delta x + x}{2} \sin \frac{x + \Delta x - x}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \\ &= - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \end{aligned}$$

$$= -\sin(x + 0) \cdot 1 = -\sin x$$

$$\text{Kemi } (\cos x)' = -\sin x$$

Shembulli 8. Të caktohet derivati i funksionit $f(x) = \operatorname{tg} x$ për $x \in R \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in Z \right\}$

Zgjidhje: Prej përkufizimit për derivate dhe vlera kufitare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ vijon e

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x + \Delta x) - \operatorname{tg} x}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(x + \Delta x)}{\cos(x + \Delta x)} - \frac{\sin x}{\cos x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(x + \Delta x) \cos x - \cos(x + \Delta x) \sin x}{\cos(x + \Delta x) \cos x}}{\Delta x} = \end{aligned}$$

Me zbatimin e formulave trigonometrike $\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha - \beta)$ vijon se

$$\begin{aligned} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x - x)}{\Delta x \cos(x + \Delta x) \cos x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x \cos(x + \Delta x) \cos x} = \\ &= \frac{1}{\cos x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(x + \Delta x)} = \\ &= \frac{1}{\cos x} \cdot 1 \cdot \frac{1}{\cos(x + 0)} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

$$\text{Kemi } (tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ për } x \in R \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in Z \right\}$$

Shembulli 9. Të caktohet derivati i funksionit $f(x) = ctgx$ për $x \in R \setminus \{k\pi \mid k \in Z\}$

Zgjidhje: Prej përkufizimit për derivate dhe vlera kufitare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ vijon e

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{ctg(x + \Delta x) - ctgx}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos(x + \Delta x)}{\sin(x + \Delta x)} - \frac{\cos x}{\sin x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos(x + \Delta x) \sin x - \sin(x + \Delta x) \cos x}{\sin(x + \Delta x) \sin x}}{\Delta x} = \end{aligned}$$

Me zbatimin e formulave trigonometrike $\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha - \beta)$ vijon se

$$\begin{aligned} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x - x - \Delta x)}{\Delta x \sin(x + \Delta x) \sin x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(-\Delta x)}{\Delta x \sin(x + \Delta x) \sin x} = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x \sin(x + \Delta x) \sin x} = \\ &= - \frac{1}{\sin x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin(x + \Delta x)} = \\ &= - \frac{1}{\sin x} \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sin(x + 0)} = - \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sin x} = - \frac{1}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

$$\text{Kemi } (ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \text{ për } x \in R \setminus \{k\pi \mid k \in Z\}$$

Njehsimi i derivatit të funksionit kryhet me ndihmën e tabelës për derivate të funksioneve elementare dhe rregullave të funksioneve të cilët nuk janë elementare.

Duke i shfrytëzuar rezultatet që paraprakisht i fituar, mund ta formojmë tabelën e derivatit të funksioneve elementare

Tabela e derivate të funksioneve elementare:

1. $(C)' = 0, (C = \text{const})$
2. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
 - 2.1. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ për $x \in R^+$
 - 2.2. $(x)' = 1$
3. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, për $x \in R, a > 0, a \neq 1$.
4. $(e^x)' = e^x$

$$5. (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \text{ për } x \in R^+, a > 0, a \neq 1.$$

$$6. (\ln x)' = \frac{1}{x}, \text{ për } x \in R^+$$

$$7. (\sin x)' = \cos x$$

$$8. (\cos x)' = -\sin x$$

$$9. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$10. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Formula të tjera të cilat do t'i marrim pa i nxjerrë dhe duhet mbajtur mend janë

$$11. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$12. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$13. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$14. (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Shembulli 10. Duke shfrytëzuar derivatet tabelare njehso derivatet:

$$a) y' = (x^3)' \qquad b) y' = \left(\frac{1}{x^5} \right)' \qquad c) y' = (\sqrt[4]{x})'$$

Zgjidhje:

$$a) y' = (x^3)' = 3x^{3-1} = 3x^2 \qquad b) y' = \left(\frac{1}{x^5} \right)' = (x^{-5})' = -5x^{-5-1} = -5x^{-6} = -\frac{5}{x^6}$$

$$c) y' = (\sqrt[4]{x})' = \left(x^{\frac{1}{4}} \right)' = \frac{1}{4} x^{\frac{1}{4}-1} = \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4x^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$$

Shembulli 11. Duke shfrytëzuar derivatet tabelare njehso derivatet a) c)

$$a) y' = (e^x)' \qquad b) y' = (5^x)' \qquad c) y' = (\log_2 x)'$$

Zgjidhje:

a) $y' = (e^x)' = e^x$

b) $y' = (5^x)' = 5^x \ln 5$

c) $y' = (\log_2 x)' = \frac{1}{x \ln 2}$

Detyra për ushtrime:

1. Të njehsohen derivatet e funksioneve:

a) $f(x) = x^7$

b) $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$

c) $f(x) = 5$

ç) $f(x) = \frac{1}{x^4}$

2. Të njehsohen derivatet e funksioneve:

a) $f(x) = 7^x$

b) $f(x) = \log_7 x$

c) $f(x) = \ln x$

ç) $f(x) = \operatorname{ctgx}$

3. Të njehsohen derivatet e funksioneve:

a) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

b) $f(x) = \log_3 x$

c) $f(x) = \cos x$

ç) $f(x) = \operatorname{tg} x$

4. Të njehsohen derivatet e funksioneve:

a) $f(x) = e^x$

b) $f(x) = \operatorname{arctg} x$

c) $f(x) = x$

ç) $f(x) = \arcsin x$

5. Të njehsohen derivatet e funksioneve:

a) $f(x) = 2^x \cdot 3^x$

b) $f(x) = \operatorname{arcctg} x$

c) $f(x) = x\sqrt[3]{x}$

ç) $f(x) = \arccos x$

3. DERIVAT PREJ SHUMËS, NDRYSHIMIT, PRODHIMIT DHE HERËSIT

Caktojmë derivate të funksioneve të fituara me disa operacione aritmetike, sipas përkufizimit është e gjatë dhe proces i përbërë. Për caktimin e derivatit të funksioneve të këtyra të fituara ekzistojnë rregulla të caktuara të cilat mundësojnë shumë më lehtë gjetjen e derivatit.

DERIVATI PREJ SHUMËS DHE NDRYSHIMIT TË FUNKSIONEVE

Të shqyrtojmë funksionin që mund të paraqitet si shumë e dy funksioneve $u(x)$ dhe $v(x)$, që janë diferenciable dhe ekzistojnë $u'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}$ dhe $v'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}$.

Sipas përkufizimit për derivate të caktojmë:

$$\begin{aligned} (u(x) + v(x))' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x)) - (u(x) + v(x))}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(u(x + \Delta x) - u(x)) + (v(x + \Delta x) - v(x))}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} = u'(x) + v'(x). \end{aligned}$$

Vijon, $(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x)$.

Ngjashëm, edhe për ndryshimin e dy funksioneve mund të vërtetohet kjo formulë për ndryshimin

$$(u(x) - v(x))' = u'(x) - v'(x).$$

Shembulli 1. Të caktohet derivati i funksionit:

a) $y = x^2 + \sin x$

b) $y = x^5 - e^x$

Zgjidhje:

a) $y' = (x^2 + \sin x)' = (x^2)' + (\sin x)' = 2x + \cos x$

b) $y' = (x^5 - e^x)' = (x^5)' - (e^x)' = 5x^4 - e^x$

Vërejtje: Kjo rregull mund të përgjithësohet dhe të vlen për shumën dhe ndryshimin të tre dhe më shumë funksioneve.

Shembulli 2. Të caktohet derivati i funksionit:

a) $y = x^3 + \cos x + 3^x$

b) $y = x - \operatorname{tg} x + \ln x - 2$

Zgjidhje:

a) $y' = (x^3 + \cos x + 3^x)' = (x^3)' + (\cos x)' + (3^x)' = 3x^2 - \sin x + 3^x \ln 3$

b) $y' = (x - \operatorname{tg} x + \ln x - 2)' = (x)' - (\operatorname{tg} x)' + (\ln x)' - (2)' = 1 - \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{x} - 0 = 1 - \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{x}$

DERIVATI PREJ PRODHIMIT TË KONSTANTES ME FUNKSION

Të shqyrtojmë funksion i cili mund të paraqitet si prodhim prej konstantes me $C = \text{konst}$ funksioni $u(x)$, që është diferenciable dhe pastaj $u'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}$.

Sipas përkufizimit për derivate të caktojmë:

$$\begin{aligned} (C \cdot u(x))' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C \cdot u(x + \Delta x) - C \cdot u(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C \cdot (u(x + \Delta x) - u(x))}{\Delta x} = \\ &= C \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} = C \cdot u'(x) \end{aligned}$$

Vijon, $(C \cdot u(x))' = C \cdot u'(x)$.

Shembulli 3. Të caktohet derivati i funksioneve:

a) $y = \frac{1}{3}x^3$

b) $y = 4 \cos x$

Zgjidhje:

a) $y' = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' = \frac{1}{3}(x^3)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2$

b) $y' = (4 \cos x)' = 4(\cos x)' = 4 \cdot (-\sin x) = -4 \sin x$

DERIVATI PREJ PRODHIMIT TË FUNKSIONEVE

Të shqyrtojmë funksion i cili mund të paraqitet si dy funksione $u(x)$ dhe $v(x)$, të cilët janë diferenciable dhe ekziston $u'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}$ dhe $v'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}$.

Sipas përkufizimit për derivate të caktuara

$$\begin{aligned}
 (u(x) \cdot v(x))' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x + \Delta x) + u(x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(u(x + \Delta x) - u(x)) \cdot v(x + \Delta x) + u(x) \cdot (v(x + \Delta x) - v(x))}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x + \Delta x) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} u(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} = \\
 &= u'(x) \cdot v(x + 0) + u(x) \cdot v'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)
 \end{aligned}$$

Vijon, $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$.

Shembulli 4. Të caktohet derivati i funksioneve:

a) $y = x^3 \cdot \sin x$

b) $y = x^2 \ln x$

c) $y = (x^2 - 3x) \cdot e^x$

Zgjidhje:

a) $y' = (x^3 \cdot \sin x)' = (x^3)' \sin x + x^3 (\sin x)' = 3x^2 \sin x + x^3 \cos x$

b) $y' = (x^2 \ln x)' = (x^2)' \ln x + x^2 (\ln x)' = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x$

c) $y' = ((x^2 - 3x)e^x)' = (x^2 - 3x)' e^x + (x^2 - 3x)(e^x)' =$
 $= (2x - 3)e^x + (x^2 - 3x)e^x = e^x(2x - 3 + x^2 - 3x) = e^x(x^2 - x - 3)$

Vërejtje: Kjo mund të përgjithësohet për prodhim të tre dhe më shumë funksione.

Shembulli 5. Të caktohet derivati i funksioneve:

a) $y = x^3 \cos x \ln x$

b) $y = x^2 e^x \ln x$

Zgjidhje:

a) $y' = (x^3 \cdot \cos x \cdot \ln x)' = (x^3)' \cdot \cos x \cdot \ln x + x^3 \cdot (\cos x)' \cdot \ln x + x^3 \cdot \cos x \cdot (\ln x)' =$
 $= 3x^2 \cdot \cos x \cdot \ln x + x^3 \cdot (-\sin x) \cdot \ln x + x^3 \cdot \cos x \cdot \frac{1}{x} = 3x^2 \cos x \ln x - x^3 \sin x \ln x + x^2 \cos x$

b) $y' = (x^2 e^x \ln x)' = (x^2)' e^x \ln x + x^2 (e^x)' \ln x + x^2 e^x (\ln x)' =$
 $= 2x e^x \ln x + x^2 e^x \ln x + x^2 e^x \cdot \frac{1}{x} = 2x e^x \ln x + x^2 e^x \ln x + x e^x = x e^x (2 \ln x + x \ln x + 1)$

DERIVATI I HERËSIT TË FUNKSIONEVE

Të shqyrtojmë funksion i cili mund të paraqitet si herës i dy funksioneve $u(x)$ dhe $v(x)$, $v(x) \neq 0$ në pikën x , të cilët janë diferenciable dhe ekziston $u'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}$ dhe $v'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}$.

Sipas përkufizimit për derivate të caktojme:

$$\begin{aligned} \left(\frac{u(x)}{v(x)} \right)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x + \Delta x)v(x) - u(x)v(x + \Delta x)}{v(x)v(x + \Delta x)}}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x)v(x) - u(x)v(x + \Delta x)}{\Delta x \cdot v(x) \cdot v(x + \Delta x)} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(u(x + \Delta x) - u(x))v(x) - u(x)(v(x + \Delta x) - v(x))}{\Delta x \cdot v(x) \cdot v(x + \Delta x)} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} v(x) - u(x) \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}}{v(x)v(x + \Delta x)} = \\ &= \frac{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \cdot v(x) - u(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}}{v(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x + \Delta x)} = \\ &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x) \cdot v(x)} = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \end{aligned}$$

Vijon, $\boxed{\left(\frac{u(x)}{v(x)} \right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}}.$

Shembulli 6. Të caktohet derivati i funksioneve:

a) $y = \frac{2x}{x+3}$ b) $y = \frac{1+x^3}{1-x^3}$

Zgjidhje:

a) $y' = \left(\frac{2x}{x+3} \right)' = \frac{(2x)'(x+3) - 2x(x+3)'}{(x+3)^2} =$

$$= \frac{2 \cdot (x+3) - 2x \cdot (1+0)}{(x+3)^2} = \frac{2x+6-2x}{(x+3)^2} = \frac{6}{(x+3)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } y' &= \left(\frac{1+x^3}{1-x^3} \right)' = \frac{(1+x^3)'(1-x^3) - (1+x^3)(1-x^3)'}{(1-x^3)^2} = \\ &= \frac{(0+3x^2)(1-x^3) - (1+x^3)(0-3x^2)}{(1-x^3)^2} = \frac{3x^2 - 3x^5 + 3x^2 + 3x^5}{(1-x^3)^2} = \frac{6x^2}{(1-x^3)^2}. \end{aligned}$$

Rregullat për diferencim mund t'i shkruajmë dhe t'i mbajmë mend, ku për të shkruar më shkurt do t'i shfrytëzojmë formulat $u(x) = u$ dhe $v(x) = v$,

$(u \pm v)' = u' \pm v'$ - derivate prej shumës dhe ndryshimit të funksioneve

$(C \cdot u)' = C \cdot u'$, për $C = \text{const}$ derivate prej prodhimit të konstantes dhe funksionit

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ - derivat prej prodhimit të funksioneve

$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$, për $v(x) \neq 0$ - derivate prej herësit të funksioneve

Shembulli 7. Të caktohet derivati i funksioneve:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = 3x^2 - 2x + 5 & \text{b) } f(x) = x^3 \cos x & \text{c) } f(x) = \frac{x^4 - 3x^3 + 1}{2x^2 - 1} \\ \text{ç) } f(x) = x \sin x - \cos x & \text{d) } f(x) = \frac{x^2 + 2}{1 + \cos x} & \text{dh) } f(x) = \frac{x+1}{x-1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}. \end{array}$$

Zgjidhje:

$$\text{a) } f'(x) = (3x^2 - 2x + 5)' = 6x - 2;$$

$$\text{b) } f'(x) = (x^3 \cos x)' = (x^3)' \cos x + x^3 (\cos x)' = 3x^2 \cos x - x^3 \sin x;$$

$$\begin{aligned} \text{c) } f'(x) &= \left(\frac{x^4 - 3x^3 + 1}{2x^2 - 1} \right)' = \frac{(x^4 - 3x^3 + 1)'(2x^2 - 1) - (x^4 - 3x^3 + 1)(2x^2 - 1)'}{(2x^2 - 1)^2} = \\ &= \frac{(4x^3 - 9x^2 + 0)(2x^2 - 1) - (x^4 - 3x^3 + 1)(4x - 0)}{(2x^2 - 1)^2} = \\ &= \frac{8x^5 - 18x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x^5 + 12x^4 - 4x}{(2x^2 - 1)^2} = \\ &= \frac{4x^5 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x}{(2x^2 - 1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta) f'(x) &= (x \sin x - \cos x)' = (x \sin x)' - (\cos x)' = (x)' \sin x + x(\sin x)' - (\cos x)' = \\ &= \sin x + x \cos x + \sin x = 2 \sin x + x \cos x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{d)} f'(x) &= \left(\frac{x^2 + 2}{1 + \cos x} \right)' = \frac{(x^2 + 2)'(1 + \cos x) - (x^2 + 2)(1 + \cos x)'}{(1 + \cos x)^2} = \\ &= \frac{(2x + 0)(1 + \cos x) - (x^2 + 2)(0 - \sin x)}{(1 + \cos x)^2} = \frac{2x + 2x \cos x + x^2 \sin x + 2 \sin x}{(1 + \cos x)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{dh)} f'(x) &= \left(\frac{x+1}{x-1} \right)' = \frac{(x+1)'(x-1) - (x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{(1+0)(x-1) - (x+1)(1-0)}{(x-1)^2} = \\ &= \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}.\end{aligned}$$

Detyra për ushtrime:

Me ndihmën e tabelës për derivate dhe për rregullat për diferencim cakto derivatet e funksioneve:

1. $f(x) = 5x$

2. $y = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$

3. $y = x^3 - 3x + 2$

4. $f(x) = 3x^4 - 6x^3 + x^2 - 4x + 8$

5. $f(x) = x + \frac{1}{x}$

6. $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^4}$

7. $f(x) = \sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x^2}$

8. $f(x) = x^2 - 2 \sin x$

9. $f(x) = 2 \sin x + 4 \cos x$

10. $f(x) = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + 5^x$

11. $f(x) = x^4 \ln x$

12. $f(x) = x^3 \cdot \cos x$

13. $f(x) = 2x \cdot \sin x$

14. $f(x) = x^{12} e^x \operatorname{tg} x$

15. $y = e^x \cdot \arcsin x$

16. $y = (3x^2 + 1)(2x - 4)(x^3 - 1)$

17. $f(x) = x^2 - \sin x \cos x$

18. $f(x) = \frac{2x+1}{x}$

19. $f(x) = \frac{1-x}{x^2+1}$

20. $y = \frac{x^2+3x}{x^2-1}$

21. $y = \frac{x-1}{x^2-4}$

22. $y = \frac{x+3}{x^2-4}$

$$23. y = \frac{x^2 - 2x - 2}{x^2 - 2x}$$

$$25. y = \frac{xe^x}{\sin x}$$

$$27. f(x) = 2 \sin x - \frac{1}{2}e^x + 7 \arctg x + 2$$

$$29. f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$$

$$31. y = \sqrt[7]{x^6} + \log_6 x - \operatorname{tg} x$$

$$33. f(x) = \frac{34 - 10x + x^2}{2x - 10}$$

$$35. y = \frac{\ln x \cdot \cos x}{x^2}$$

$$37. y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$39. y = \frac{(1 + \sqrt[3]{x})^3}{\sqrt{x}}$$

$$24. f(x) = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$$

$$26. f(x) = \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$$

$$28. y = \sqrt[3]{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{4x^3}$$

$$30. y = \frac{e^x + \cos x}{xe^x}$$

$$32. y = x^4 \cdot e^x \cdot \sin x$$

$$34. y = \frac{e^x + \sin x}{xe^x}$$

$$36. y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$38. y = \ln x \cdot \operatorname{tg} x \cdot \sqrt{x}$$

$$40. y = \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x}}}$$

4. DERIVATI PREJ FUNKSIONIT TË PËRBËRË

Le të jenë dhënë funksionet $f(x) = 2 \sin x$ dhe $g(x) = x^2 + 1$. T'i formojmë funksionet $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ dhe $r(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

$$h(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = 2 \sin(x^2 + 1)$$

$$r(x) = g(f(x)) = g(2 \sin x) = (2 \sin x)^2 + 1 = 4 \sin^2 x + 1.$$

Funksionet $h(x) = f(g(x))$ dhe $r(x) = g(f(x))$ quhen funksione të përbëra ose kompozicion prej $f(x)$ dhe $g(x)$.

Funksionin $y = \cos(x^3 + 2)$ mund ta shqyrtojmë si funksion të përbërë, që është fituar prej funksioneve, $f(x) = \cos x$ dhe $g(x) = x^3 + 2$ pasi $f(g(x)) = f(x^3 + 2) = \cos(x^3 + 2) = y$.

Nëse funksioni $y = \cos(x^3 + 2)$ që i përbërë e shkruajmë me ndihmën e funksionit $u(x) = x^3 + 2$, do të kemi $y = \cos(u)$. Gjatë kësaj mënyre të shkruarit e funksionit $u(x)$ quhet **funksion ndërmjetësues (ndihmëse)**.

Funksioni ndërmjetësues $u(x)$ nuk është njëvlerësisht i përcaktuar.

Shembulli 1. Janë dhënë funksionet e përbëra. Të caktohet funksioni ndërmjetësues $u(x)$ dhe të shkruhet funksioni në formën $y = f(u)$:

a) $y = \sqrt{x^2 + 2x}$

b) $y = e^{2x+1}$

c) $y = \ln(x^2 + 3x - 4)$

ç) $y = (x^2 + 1)^9$

Zgjidhje:

a) Për $y = \sqrt{x^2 + 2x}$, kemi $u(x) = x^2 + 2x$ dhe $y = \sqrt{u}$,

b) Për $y = e^{2x+1}$, kemi $u(x) = 2x + 1$ dhe $y = e^u$,

c) Për $y = \ln(x^2 + 3x - 4)$, kemi $u(x) = x^2 + 3x - 4$ dhe $y = \ln(u)$,

ç) Për $y = (x^2 + 1)^9$, kemi $u(x) = x^2 + 1$ dhe $y = u^9$.

Le të jetë $y = f(u(x))$ funksion i përbërë d.m.th., $y = f(u)$ dhe $u = u(x)$.

Nëse ekziston derivati $y' = f'(u)$ dhe $u' = u'(x)$, atëherë edhe derivati i y sipas x , ndërsa poash-tu vlen:

$$y' = (f(u(x)))' = f'(u) \cdot u'$$

Rregulla për njehsimin e derivatit prej funksionit të përbërë mund të vërtetohet sipas përkufizimit. Në këtë pjesë nuk do ta vërtetojmë gjykimin.

Shembulli 2. Të gjendet derivati i funksionit $y = (x^2 + 1)^9$.

Zgjidhje: Funkcioni $y = (x^2 + 1)^9$ është funksion i përbërë dhe me funksionin e ndërmjetësimit $u = x^2 + 1$ fitohet funksioni $y = (x^2 + 1)^9 = u^9$.

$$\begin{aligned}\text{Vijon } y' &= ((x^2 + 1)^9)' = (u^9)' = 9u^8 \cdot u' = \\ &= 9(x^2 + 1)^8 (x^2 + 1)' = 9(x^2 + 1)^8 (2x + 0) = 18x(x^2 + 1)^8\end{aligned}$$

Shembulli 3. Të gjendet derivati i funksionit $y = e^{2x+1}$.

Zgjidhje: Funkcioni $y = e^{2x+1}$ është funksion i përbërë dhe me funksionin e ndërmjetësimit $u = 2x + 1$ fitohet funksioni $y = e^{2x+1} = e^u$.

$$\text{Vijon } y' = (e^{2x+1})' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{2x+1} (2x + 1)' = e^{2x+1} (2 \cdot 1 + 0) = 2e^{2x+1}$$

Shembulli 4. Të gjendet derivati i funksionit $y = \ln(x^2 + 3x - 4)$.

Zgjidhje: Funkcioni $y = \ln(x^2 + 3x - 4)$ është funksion i përbërë dhe me funksionin e ndërmjetësimit $u = x^2 + 3x - 4$ fitohet funksioni $y = \ln(x^2 + 3x - 4) = \ln u$.

$$\begin{aligned}\text{Vijon } y' &= (\ln(x^2 + 3x - 4))' = (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{x^2 + 3x - 4} \cdot (x^2 + 3x - 4)' = \\ &= \frac{1}{x^2 + 3x - 4} \cdot (2x + 3 - 0) = \frac{2x + 3}{x^2 + 3x - 4}\end{aligned}$$

Shembulli 5. Të gjendet derivati i funksionit $y = \sin(x^2)$.

Zgjidhje: Funkcioni $y = \sin(x^2)$ është funksion i përbërë dhe me funksionin e ndërmjetësimit $u = x^2$ fitohet funksioni $y = \sin(x^2) = \sin u$.

$$\text{Vijon } y' = (\sin(x^2))' = (\sin u)' = \cos u (u)' = \cos x^2 \cdot (x^2)' = \cos x^2 \cdot 2x = 2x \cos x^2$$

Shembulli 6. Të gjendet derivati i funksionit $y = \sin^2 x$.

Zgjidhje: Funkcioni $y = \sin^2 x$ është funksion i përbërë dhe me funksionin e ndërmjetësimit $u = \sin x$ fitohet funksioni $y = \sin^2 x = (\sin x)^2 = u^2$.

$$\begin{aligned}\text{Vijon } y' &= (\sin^2 x)' = (u^2)' = 2u (u)' = 2 \sin x (\sin x)' = 2 \sin x \cdot \cos x = \\ &= 2 \sin x \cos x = \sin 2x\end{aligned}$$

Te detyrat shfrytëzuar edhe formula trigonometrike për sinus të këndit të dyfishuar.

Shembulli 7. Të gjendet derivati i funksionit $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$.

Zgjidhje: Funksioni $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$ është funksion i përbërë dhe me funksionin e ndërmjetësimit

$$u = \frac{1+x}{1-x} \text{ fitohet funksioni } y = \ln \frac{1+x}{1-x} = \ln u.$$

$$\begin{aligned} \text{Vijon } y' &= \left(\ln \frac{1+x}{1-x} \right)' = (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \left(\frac{1+x}{1-x} \right)' = \\ &= \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{(1+x)'(1-x) - (1+x)(1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{(0+1) \cdot (1-x) - (1+x) \cdot (0-1)}{(1-x)^2} = \\ &= \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{2}{1-x} = \frac{2}{(1+x)(1-x)} = \frac{2}{1-x^2} \end{aligned}$$

Nëse e zbatojmë rregullën për derivate të funksionit të përbërë te tabela për funksione elementare, do të kemi tabelë të re për derivate të funksioneve të prëbëra.

Tabela e derivate të funksioneve të prëbëra

1. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
2. $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
3. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$, për $a > 0$, $a \neq 1$.
4. $(e^u)' = e^u \cdot u'$
5. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$, për $a > 0$, $a \neq 1$.
6. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
7. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
8. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
9. $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
10. $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$

Vërejtje: Në këtë tabelë ndryshorja ndërmjetësuese (ndihmëse) u është funksion prej x , $u = u(x)$

Shembulli 7. Të gjendet derivati i funksionit $y = \frac{1}{(3x^2 + 2)^7} = (3x^2 + 2)^{-7}$.

Zgjidhje: Funksioni $y = (3x^2 + 2)^{-7}$ është funksion i përbërë dhe me funksionin e ndërmjetësimit $u = 3x^2 + 2$ Fitohet funksioni $y = \frac{1}{(3x^2 + 2)^7} = (3x^2 + 2)^{-7}$.

$$\begin{aligned} \text{Vijon } y' &= ((3x^2 + 2)^{-7})' = (u^{-7})' = (-7)u^{-8} \cdot u' = (-7)(3x^2 + 2)^{-8}(3x^2 + 2)' = \\ &= (-7)(3x^2 + 2)^{-8}(6x + 0)' = -42x(3x^2 + 2)^{-8} = -\frac{42x}{(3x^2 + 2)^8} \end{aligned}$$

Vërejtje: Gjatë zgjidhjes së detyrave prej funksionit të përbërë, mëtutje jo patjetër të shfrytëzohet zëvendësimi me funksion ndërmjetësues, të kemi kujdes cili është funksioni ndërmjetësues dhe pa shkruar zëvendësimin njehsohet derivati i funksionit të përbërë.

Shembulli 8. Të gjendet derivati i funksionit $y = e^{\cos x}$.

Zgjidhje: Funksioni $y = e^{\cos x}$ është funksion i përbërë dhe me funksionin e ndërmjetësimit $u = \cos x$. Tani nuk do ta zëvendësojmë funksionin ndërmjetësues

$$\text{Vijon } y' = (e^{\cos x})' = e^{\cos x} (\cos x)' = e^{\cos x} (-\sin x) = -e^{\cos x} \sin x.$$

Shembulli 9. Të gjendet derivati i funksionit $y = e^{2x} \cos x$.

Zgjidhje:

$$\begin{aligned} y' &= (e^{2x} \cos x)' = (e^{2x})' \cos x + e^{2x} (\cos x)' = e^{2x} (2x)' \cos x - e^{2x} \sin x = \\ &= 2e^{2x} \cos x - e^{2x} \sin x = e^{2x} (2 \cos x - \sin x) \end{aligned}$$

Shembulli 10. Të gjendet derivati i funksionit $y = \ln \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$.

Zgjidhje: Funksioni $y = \ln \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$ është funksion i përbërë, vijon:

$$y' = \left(\ln \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \right)' = \frac{1}{\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}} \left(\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \right)' =$$

Pasi funksioni $\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$ është i përbërë, përsëri e zbatojmë rregullën për derivate prej funksionit të përbërë,

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}} \cdot \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)' = \\
 &= \frac{1}{2 \left(\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \right)^2} \cdot \frac{(1-x^2)'(1+x^2) - (1-x^2)(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = \\
 &= \frac{1}{2 \cdot \frac{1-x^2}{1+x^2}} \cdot \frac{(0-2x) \cdot (1+x^2) - (1-x^2) \cdot (0+2x)}{(1+x^2)^2} = \\
 &= \frac{1+x^2}{2(1-x^2)} \cdot \frac{-2x-2x^3-2x+2x^3}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2}{2(1-x^2)} \cdot \frac{-4x}{(1+x^2)^2} = \\
 &= \frac{1}{(1-x^2)} \cdot \frac{-2x}{(1+x^2)} = -\frac{2x}{(1-x^2)(1+x^2)} = -\frac{2x}{1-x^4} = \frac{2x}{x^4-1}
 \end{aligned}$$

Detyra për ushtrime:

Duke shfrytëzuar rregullën për derivate të funksionit të përbërë dhe rregullave për derivate prej shumës, ndryshimit, prodhimit dhe herësit të funksioneve gjeji derivatet e këtyre funksioneve:

1. $f(x) = (5x-7)^3$

2. $y = \sqrt{3x-5}$

3. $y = e^{x^2-2x+5}$

4. $y = \ln(2x-9)$

5. $f(x) = \ln \frac{x^2}{1-x^2}$

6. $y = \ln \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

7. $f(x) = x \cdot \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$

8. $f(x) = x \sin x^4$

9. $y = \sin x^5$

10. $y = \sin^5 x$

11. $y = \cos^3 x \cdot \cos x^3$

12. $y = 1 - \operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x$

$$13. y = \left(\frac{x-3}{x+3} \right)^3$$

$$15. f(x) = \sin \sqrt{1+x^2}$$

$$17. y = \ln(\sin(x^2 - 2x + 2))$$

$$19. y = \ln \sqrt{\frac{x^2+4}{x^2-4}}$$

$$21. f(x) = \sqrt[3]{x^2+6x-27}$$

$$23. y = (x+1)\sqrt{x^2+1}$$

$$25. y = \ln \frac{1+x^2}{1-x^2}$$

$$14. y = e^{tgx}$$

$$16. y = \frac{1}{2} \ln(x+1) - \frac{1}{4} \ln(x^2-1)$$

$$18. y = \ln \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} - \sqrt{x^2+1}$$

$$20. y = e^{\sin x}$$

$$22. y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$24. y = \frac{(x^2+1)^{10}}{5}$$

5. DERIVATET LOGARITMIKE

Shembulli 1. Ta njehsojmë derivatin e funksionit $y = x^x$.

Derivati i funksionit $y = x^x$ nuk mund të njehsohet me zbatimin e rregullave paraprake për diferencim, pasi funksioni ka ndryshore edhe te baza edhe te eksponenti i fuqisë. Për njehsimin e derivatit të funksionit do të shfrytëzojmë mënyrë për diferencim logaritmik.

Le të jetë dhënë funksioni $y = f(x)^{g(x)}$, ku funksionet $f(x)$ dhe $g(x)$ janë pozitive dhe diferenciable. Për ta njehsuar derivatin e funksionit së pari do ta logaritmojmë barazimin, ndërsa pastaj do t'i shfrytëzojmë vetitë për logaritme për rregullimin e shprehjes.

$y = f(x)^{g(x)}$ / logaritmizohet prej të dy anëve

$$\ln y = \ln \left(f(x)^{g(x)} \right)$$

$$\ln y = g(x) \ln \left(f(x) \right)$$

Tani mund të kërkojmë derivate prej të dy anëve, ku duhet të kemi kujdes se $y = y(x)$ është funksion i përbërë prej ndryshores x , ndërsa në anën e djathtë do të shfrytëzojmë derivate prej prodhimit.

$$(\ln y)' = \left(g(x) \ln \left(f(x) \right) \right)'$$

$$\frac{1}{y} y' = \left(g(x) \right)' \ln \left(f(x) \right) + g(x) \left(\ln \left(f(x) \right) \right)'$$

Prej ku vijon se

$$y' = y \cdot \left(\left(g(x) \right)' \ln \left(f(x) \right) + g(x) \left(\ln \left(f(x) \right) \right)' \right) \text{ d.m.th.,}$$

$$y' = f(x)^{g(x)} \cdot \left(\left(g(x) \right)' \ln \left(f(x) \right) + g(x) \left(\ln \left(f(x) \right) \right)' \right)$$

Mënyra për caktimin e derivatit të funksionit quhet **mënyra për diferencim logaritmik**.

Duke e shfrytëzuar këtë mënyrë mund të caktojmë derivate prej funksionit $y = x^x$.

Tani e vazhdojmë mënyrën për gjetjen e derivatit të funksionit prej shembullit 1:

Le të jetë dhënë funksioni $y = x^x$, nëse e logaritmojmë kemi:

$$\ln y = \ln x^x$$

$\ln y = x \ln x$, me diferencim të barazimit kemi:

$$(\ln y)' = (x \ln x)'$$

$$\frac{1}{y} y' = (x)' \ln x + x (\ln x)'$$

$$\frac{1}{y} y' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{y} y' = \ln x + 1$$

$y' = y \cdot (\ln x + 1)$ me zëvendësim të funksionit fillestar fitohet zgjidhja e derivatit

$$y' = x^x \cdot (\ln x + 1)$$

Shembulli 2. Me diferencimin logaritmik të gjendet derivati i funksionit

$$y = (\cos x)^{\sin x}.$$

Zgjidhje: Së pari e logaritmojmë funksionin $y = (\cos x)^{\sin x}$,

$$\ln y = \ln(\cos x)^{\sin x}$$

$$\ln y = \sin x \cdot \ln(\cos x),$$

ta diferencojmë barazimin

$$(\ln y)' = (\sin x \cdot \ln(\cos x))'$$

$$\frac{1}{y} y' = (\sin x)' \cdot \ln(\cos x) + \sin x \cdot (\ln(\cos x))'$$

$$\frac{1}{y} y' = \cos x \cdot \ln(\cos x) + \sin x \cdot \left(\frac{1}{\cos x} (\cos x)' \right)$$

$$\frac{1}{y} y' = \cos x \cdot \ln(\cos x) + \sin x \cdot \left(\frac{1}{\cos x} (-\sin x) \right)$$

$$\frac{1}{y} y' = \cos x \cdot \ln(\cos x) - \sin x \cdot \frac{\sin x}{\cos x}$$

$y' = y \cdot (\cos x \cdot \ln(\cos x) - \sin x \cdot \operatorname{tg} x)$ dhe me zëvendësim të funksionit fillestar kemi se derivati i funksionit është:

$$y' = (\cos x)^{\sin x} \cdot (\cos x \cdot \ln(\cos x) - \sin x \cdot \operatorname{tg} x)$$

Shembulli 3. Me diferencimin logaritmik të gjendet derivati i funksionit

$$y = \sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^3}}.$$

Zgjidhje: Funksioni $y = \sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^3}}$, me shfrytëzimin e vetive mund ta shkruajmë si

$$y = \left(1 + \frac{1}{x^3} \right)^{\frac{1}{x}}$$

$$\begin{aligned}
\ln y &= \ln \left(1 + \frac{1}{x^3} \right)^{\frac{1}{x}} \\
\ln y &= \frac{1}{x} \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x^3} \right) \\
(\ln y)' &= \left(\frac{1}{x} \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x^3} \right) \right)', \\
\frac{1}{y} y' &= \left(\frac{1}{x} \right)' \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x^3} \right) + \frac{1}{x} \cdot \left(\ln \left(1 + \frac{1}{x^3} \right) \right)', \\
\frac{1}{y} y' &= -\frac{1}{x^2} \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x^3} \right) + \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{x^3}} \left(1 + \frac{1}{x^3} \right)' \right), \\
\frac{1}{y} y' &= -\frac{1}{x^2} \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x^3} \right) + \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1}{\frac{x^3+1}{x^3}} \cdot \left(-\frac{3}{x^4} \right) \right) \\
\frac{1}{y} y' &= -\frac{1}{x^2} \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x^3} \right) - \frac{3}{x^2(x^3+1)} \\
y' &= y \left(-\frac{1}{x^2} \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x^3} \right) - \frac{3}{x^2(x^3+1)} \right), \text{ vijon} \\
y' &= -\frac{1}{x^2} \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^3}} \cdot \left(\ln \left(1 + \frac{1}{x^3} \right) + \frac{3}{x^3+1} \right)
\end{aligned}$$

Shembulli 4. Me diferencimin logaritmik të gjendet derivati i funksionit

$$y = \left(\frac{x-5}{x+3} \right)^{\frac{1}{x+3}}$$

Zgjidhje: Ta caktojmë derivatin e funksionit $y = \left(\frac{x-5}{x+3} \right)^{\frac{1}{x+3}}$ me logaritmim.

$$\begin{aligned}
\ln y &= \ln \left(\frac{x-5}{x+3} \right)^{\frac{1}{x+3}} \\
\ln y &= \frac{1}{x+3} \ln \left(\frac{x-5}{x+3} \right), \text{ diferencojmë dhe kemi} \\
(\ln y)' &= \left(\frac{1}{x+3} \ln \left(\frac{x-5}{x+3} \right) \right)',
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} y' &= \left(\frac{1}{x+3} \right)' \ln \left(\frac{x-5}{x+3} \right) + \frac{1}{x+3} \left(\ln \left(\frac{x-5}{x+3} \right) \right)', \\ \frac{1}{y} y' &= \left(-1(x+3)^{-2}(x+3)' \right) \ln \left(\frac{x-5}{x+3} \right) + \frac{1}{x+3} \left(\frac{1}{\frac{x-5}{x+3}} \left(\frac{x-5}{x+3} \right)' \right), \\ \frac{1}{y} y' &= \left(-\frac{1}{(x+3)^2}(1+0) \right) \ln \left(\frac{x-5}{x+3} \right) + \frac{1}{x+3} \cdot \frac{x+3}{x-5} \cdot \frac{(x-5)'(x+3) - (x-5)(x+3)'}{(x+3)^2}, \\ \frac{1}{y} y' &= -\frac{1}{(x+3)^2} \ln \left(\frac{x-5}{x+3} \right) + \frac{1}{x-5} \cdot \frac{x+3-x+5}{(x+3)^2}, \\ \frac{1}{y} y' &= -\frac{1}{(x+3)^2} \ln \left(\frac{x-5}{x+3} \right) + \frac{8}{(x-5)(x+3)^2}, \\ y' &= y \left(-\frac{1}{(x+3)^2} \ln \left(\frac{x-5}{x+3} \right) + \frac{8}{(x-5)(x+3)^2} \right), \\ y' &= -\frac{1}{(x+3)^2} \cdot \left(\frac{x-5}{x+3} \right)^{\frac{1}{x+3}} \cdot \left(\ln \left(\frac{x-5}{x+3} \right) - \frac{8}{x-5} \right) \end{aligned}$$

Shembulli 5. Me diferencimin logaritmik të gjendet derivati i funksionit

$$y = \left(\frac{\ln x}{x} \right)^{\sin x}.$$

Zgjidhje: Ta logaritmojmë funksionin $y = \left(\frac{\ln x}{x} \right)^{\sin x}$.

$$\ln y = \ln \left(\frac{\ln x}{x} \right)^{\sin x}$$

$\ln y = \sin x \cdot \ln \left(\frac{\ln x}{x} \right)$ tani mund të diferencojmë dhe kemi:

$$(\ln y)' = \left(\sin x \cdot \ln \left(\frac{\ln x}{x} \right) \right)'$$

$$\frac{1}{y} y' = (\sin x)' \cdot \ln \left(\frac{\ln x}{x} \right) + \sin x \cdot \left(\ln \left(\frac{\ln x}{x} \right) \right)'$$

$$\frac{1}{y} y' = \cos x \cdot \ln \left(\frac{\ln x}{x} \right) + \sin x \cdot \frac{1}{\frac{\ln x}{x}} \cdot \left(\frac{\ln x}{x} \right)'$$

$$\frac{1}{y} y' = \cos x \cdot \ln \left(\frac{\ln x}{x} \right) + \sin x \cdot \frac{x}{\ln x} \cdot \frac{(\ln x)' \cdot x - \ln x \cdot (x)'}{x^2}$$

$$\frac{1}{y} y' = \cos x \cdot \ln \left(\frac{\ln x}{x} \right) + \sin x \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x}$$

$$\frac{1}{y} y' = \cos x \cdot \ln \left(\frac{\ln x}{x} \right) + \sin x \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1 - \ln x}{x}$$

$$\frac{1}{y} y' = \cos x \cdot \ln \left(\frac{\ln x}{x} \right) + \frac{\sin x \cdot (1 - \ln x)}{x \ln x}$$

$$y' = y \left(\cos x \cdot \ln \left(\frac{\ln x}{x} \right) + \frac{\sin x \cdot (1 - \ln x)}{x \ln x} \right), \text{ me zëvendësim të funksionit fillestar fitohet}$$

$$y' = \left(\frac{\ln x}{x} \right)^{\sin x} \cdot \left(\cos x \cdot \ln \left(\frac{\ln x}{x} \right) + \frac{\sin x (1 - \ln x)}{x \ln x} \right)$$

Mënyra për gjetjen e derivatit të funksionit me diferencim logaritmik mund të shfrytëzohet edhe te funksionet të cilat janë paraqitur me prodhim dhe herës të më shumë funksioneve të përbëra dhe për të mos pasur shumë shprehje të komplikuar së pari logaritmohet funksioni, ndërsa pastaj kërkohet derivati i tij.

Shembulli 6. Me diferencim logaritmik të gjendet derivati i funksionit $y = \frac{\sqrt[5]{(x+4)^3}}{(x-1)^2(x+3)^5}$.

Zgjidhje: Ta logaritmojmë funksionin $y = \frac{\sqrt[5]{(x+4)^3}}{(x-1)^2(x+3)^5}$,

$$\ln y = \ln \frac{\sqrt[5]{(x+4)^3}}{(x-1)^2(x+3)^5}$$

$$\ln y = \ln \frac{(x+4)^{\frac{3}{5}}}{(x-1)^2(x+3)^5}$$

$$\ln y = \ln(x+4)^{\frac{3}{5}} - \ln(x-1)^2 - \ln(x+3)^5$$

$$\ln y = \frac{3}{5} \ln(x+4) - 2 \ln(x-1) - 5 \ln(x+3), \text{ tani mund të diferencojmë}$$

$$(\ln y)' = \left(\frac{3}{5} \ln(x+4) - 2 \ln(x-1) - 5 \ln(x+3) \right)'$$

$$\frac{1}{y} y' = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{x+4} (x+4)' - 2 \cdot \frac{1}{x-1} (x-1)' - 5 \cdot \frac{1}{x+3} (x+3)'$$

$$\frac{1}{y} y' = \frac{3}{5(x+4)} - \frac{2}{x-1} - \frac{5}{x+3}$$

$$y' = y \left(\frac{3}{5(x+4)} - \frac{2}{x-1} - \frac{5}{x+3} \right)$$

$$y' = \frac{\sqrt[5]{(x+4)^3}}{(x-1)^2(x+3)^5} \left(\frac{3}{5(x+4)} - \frac{2}{x-1} - \frac{5}{x+3} \right)$$

Detyra për ushtrime:

Duke shfrytëzuar rregullën për diferencim logaritmik të njehsohet derivati i këtyre funksioneve:

$$1. y = \sqrt[x]{1 + \frac{1}{x^5}}$$

$$3. y = \sqrt[x]{1 + \frac{1}{x^7}}$$

$$5. y = (\sin x)^{\sin^2 x}$$

$$7. y = x^{\frac{1}{x}}$$

$$9. y = \left(1 - \frac{1}{x+1} \right)^x$$

$$11. y = x^{-x}$$

$$13. y = \frac{x+3}{(x-7)\sqrt[4]{(x+2)^3}}$$

$$15. y = \frac{(1-x^2)e^{3x-1} \cos x}{\sin^3 x}$$

$$2. y = \left(\frac{x+7}{x-2} \right)^{\frac{1}{x-2}}$$

$$4. y = \left(\frac{x+5}{x+4} \right)^{\frac{1}{x+4}}$$

$$6. y = (\sin x)^{\cos x}$$

$$8. y = (\ln x)^x$$

$$10. y = x^{x+1}(x+1)$$

$$12. y = \left(\frac{\ln x}{x} \right)^{\cos x}$$

$$14. y = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2} \cdot \sqrt[4]{(x+3)^3}}$$

$$16. y = \sqrt{(x+1)^3} \cdot \frac{2x-1}{x+2} \cdot e^{x^2} \cdot \sin^4 x \cdot \cos^3 x$$

6. ZBATIMI I DERIVATEVE. ÇAKTIMI I BARAZIMIT TË TANGJENTËS DHE NORMALES SË FUNKSIONIT

DERIVAT TË RENDIT TË LARTË

Le të jetë dhënë funksioni diferenciable $y = f(x)$ dhe $x \in D_f$, d.m.th., ekziston derivat $y' = f'(x)$ i funksionit te pika të fushës së përkufizimit.

Derivati i dytë ose derivatek i rendit të dytë të funksionit $y = f(x)$ është derivat prej derivatit të funksionit $y' = f'(x)$ dhe shënohet me $y'' = f''(x) = (f'(x))'$.

Për këtë shkak, derivati $y' = f'(x)$ quhet **derivatek i rendit të parë** të funksionit $y = f(x)$.

Derivati prej derivatit të dytë të $y'' = f''(x)$ të funksionit $y = f(x)$ quhet derivatek i **tretë** dhe shënohet me $y''' = f'''(x) = (f''(x))'$.

Mënyra mund të vazhdon.

$y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$ quhet **derivati n** i $y = f(x)$.

Funksioni $f(x)$ n -diferenciable nëse ekziston derivati n në çdo pikë prej fushës së përkufizimit.

Nëse n tenton në pakufi, themi se funksioni është pafund diferenciable.

Shembulli 1. Të gjendet derivati prej:

a) rendit të dytë të funksionit $y = \frac{1}{12}x^4 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{1}{4}$

b) rendit të tretë të funksionit $y = 4x^2 - \sin x$

c) rendit të katërt të funksionit $y = \ln x$

Zgjidhje:

a) Ta caktojmë derivatin e rendit të dytë të $y = \frac{1}{12}x^4 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{1}{4}$. Së pari duhet ta njehsojmë derivatin e rendit të parë, ndërsa pastaj derivatin e rendit të dytë.

$$y' = \left(\frac{1}{12}x^4 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{1}{4} \right)' = \frac{1}{12}(x^4)' - \frac{5}{6}(x^3)' + \left(\frac{1}{4} \right)' = \frac{1}{12} \cdot 4x^3 - \frac{5}{6} \cdot 3x^2 + 0 = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2$$

$$y'' = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 \right)' = \frac{1}{3}(x^3)' - \frac{5}{2}(x^2)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - \frac{5}{2} \cdot 2x = x^2 - 5x$$

- b) Ta caktojme derivatin e rendit të tretë të $y = 4x^2 - \sin x$. Duhet t'i njehsojmë me radhë të gjithë derivatet, derivatin e rendit të parë, derivatin e rendit të dytë dhe në fund derivatin e rendit të tretë.

$$y' = (4x^2 - \sin x)' = 4(x^2)' - (\sin x)' = 4 \cdot 2x - \cos x = 8x - \cos x$$

$$y'' = (8x - \cos x)' = 8(x)' - (\cos x)' = 8 \cdot 1 - (-\sin x) = 8 + \sin x$$

$$y''' = (8 + \sin x)' = (8)' + (\sin x)' = 0 + \cos x = \cos x$$

- c) Për ta caktuar derivatin e rendit të katërt të funksionit $y = \ln x$, duhet t'i njehsojmë me radhë derivatet e çdo rendi

$$y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$y'' = \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$y''' = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = (-x^{-2})' = -(-2)x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

$$y^{(4)} = \left(\frac{2}{x^3}\right)' = 2(x^{-3})' = 2 \cdot (-3) \cdot x^{-4} = -\frac{6}{x^4}$$

BARAZIMI I TANGJENTËS

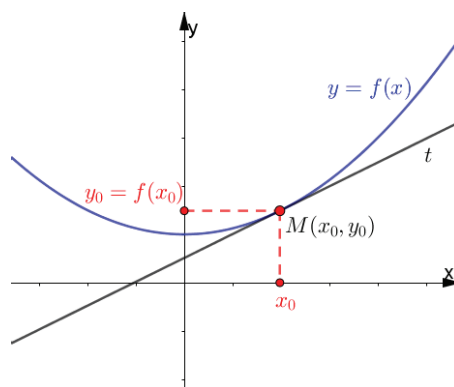
Gjatë përkufizimit të konceptit derivate, vërejtëm se koeficienti i drejtimit të tangjentës te funksioni i dhënë $y = f(x)$ te pika $M(x_0, f(x_0))$ prej lakores është i barabartë me vlerën e derivatit të funksionit te pika M , d.m.th., $k_t = f'(x_0)$.

Pasi barazimi i drejtëzës nëpër një pikë $A(x_0, y_0)$ dhe koeficienti i drejtimit k caktohet me $y - y_0 = k(x - x_0)$, vijon se **barazimi im tangjentës** i funksionit diferenciable $y = f(x)$ në pikën $M(x_0, f(x_0))$, ku $y_0 = f(x_0)$ dhe $k = k_t = f'(x_0)$

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Barazimi i tangjentës të grafikut të funksionit $y = f(x)$ që është diferenciable në pikën $M(x_0, y_0)$ është

$$t: y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$



Shembulli 1. Të shkruhet barazimi i tangjentës të lakores $f(x) = 5x - x^2$ në pikën M me abshisë $x = 1$.

Zgjidhje: Së par ii caktojmë Koordinatat e pikës prekëse $M(x_0, y_0)$. Prej kushtit të detyrës $x_0 = 1$ dhe $y_0 = f(x_0) = f(1) = 5 \cdot 1 - 1^2 = 5 - 1 = 4$.

Vijon, pika e prekjes është $M(1, 4)$.

Derivati prej çfarëdo pikë x është:

$$f'(x) = (5x - x^2)' = 5(x)' - (x^2)' = 5 \cdot 1 - 2x = 5 - 2x.$$

Koeficienti i drejtimit të tangjentës te pika $M(1, 4)$ është $k_t = f'(1) = 5 - 2 \cdot 1 = 5 - 2 = 3$.

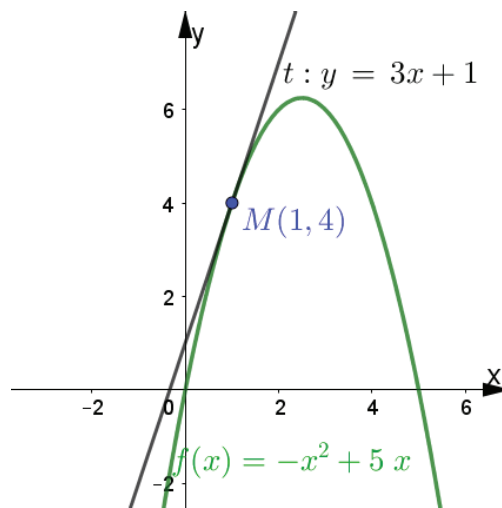
Duke zëvendësuar vlerat e $x_0 = 1$, $y_0 = 4$ dhe $f'(x_0) = 3$ te barazimi i tangjentës t , kemi:

$$y - 4 = 3(x - 1)$$

$$y - 4 = 3x - 3$$

$$y = 3x - 3 + 4 \text{ d.m.th.,}$$

$$y = 3x + 1 \text{ është barazimi i tangjentës}$$



Shembulli 2. Në cilën pikë të lakores $y = x^3 + 2x^2 - 1$ tangjenta e ka koeficientin e drejtimit 4?

Zgjidhje: Prej kushtit të detyrës $k_t = 4$.

Duhet t'i caktojmë koordinatat e pikëprekjes $M(x_0, y_0)$.

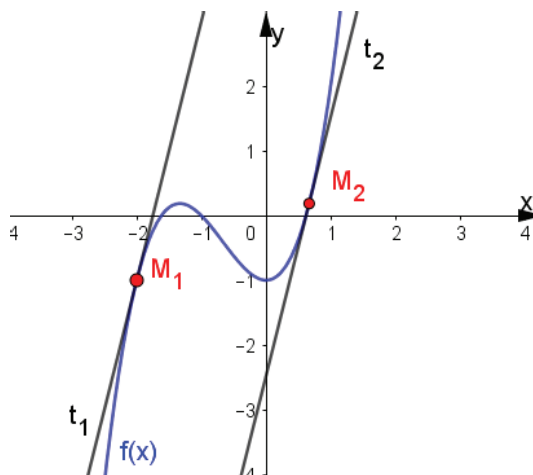
Abshisën x_0 e pikëprekjes do ta caktojmë prej kushtit $k_t = f'(x_0)$.

Derivati i funksionit është

$$y' = (x^3 + 2x^2 - 1)' = 3x^2 + 4x, \text{ port e } x_0$$

është $f'(x_0) = 3x_0^2 + 4x_0$ dhe e fitojmë barazimin

$$4 = 3x_0^2 + 4x_0, \text{ t.e } 3x_0^2 + 4x_0 - 4 = 0.$$



E zgjidhim barazimi katror të fituar

$$x_{0_{1/2}} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4)}}{2 \cdot 3} = \frac{-4 \pm 8}{6}, \text{ për të cilën kemi } x_{0_1} = -2 \text{ dhe } x_{0_2} = \frac{2}{3}.$$

Tani mund t'i caktojmë koordinatat y_0 .

1) $y_{0_1} = f(x_{0_1}) = f(-2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 - 1 = -8 + 8 - 1 = -1$, d.m.th., pika e kërkuar është $M_1(-2, -1)$. Barazimi i tangjentës është $y - (-1) = 4(x - (-2))$, ndërsa barazimi i tangjentës t_1 i rregulluar është t_1 e $y = 4x + 7$.

2) $y_{0_2} = f(x_{0_2}) = f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 + 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1 = \frac{8}{27} + \frac{8}{9} - 1 = \frac{5}{27}$, d.m.th., pika e kërkuar është $M_2\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{27}\right)$

Barazimi i tangjentës $y - \frac{5}{27} = 4\left(x - \frac{2}{3}\right)$, ose barazimi i tangjentës

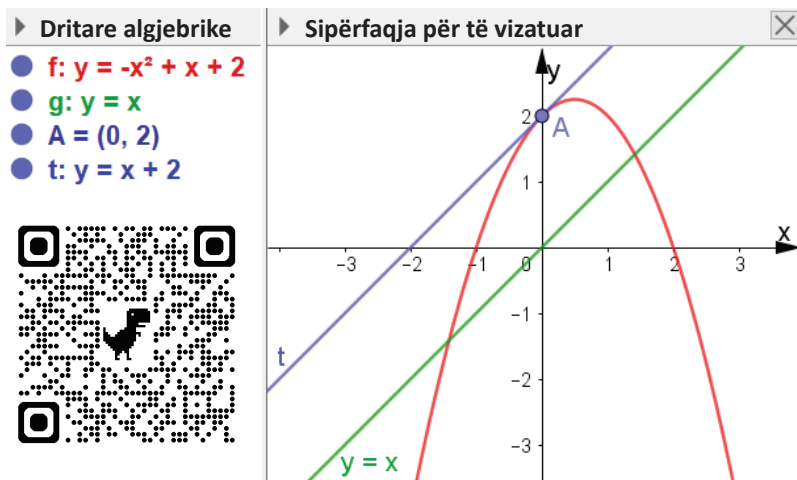
t_2 : $y = 4x - \frac{67}{27}$ d.m.th., në formën e përgjithshme është $108x - 27y - 67 = 0$.

Vërejtje: Të dy tangjentet janë paralele ndërmjet veti pasi kanë koeficient të të njëjtë të drejtimit $k_t = 4$.

Gjatë zgjidhjes së detyrave mund të punojmë së pari aplet për barazimin e tangjentës dhe pastaj me animacione të arrijmë deri te zgjidhja, që algjebrikisht duhet ta njehsojmë.

Shembulli 3. Të gjendet barazimi i tangjentës së lakores $y = -x^2 + x + 2$ që është paralele me simetralen e kuadrantit të parë dhe të tretë.

Zgjidhje: Së pari kemi punuar aplet në Geogebra tek i cili me prove nxënësit mund të arrijnë deri te zgjidhja. Në çfarëdo pikë prej lakores konstruktojmë tangjentë dhe pastaj me lëvizje të pikës kontrollojmë kur tangjenta do të jetë paralele me drejtëzën e dhënë $y = x$.



<https://www.geogebra.org/m/kwsj9c6n>

Prej kushtit të detyrës, pasi tangjenta duhet jetë paralele me simetralen e kuadrantit të parë dhe të tretë $y = x$ fitohet $k_t = 1$.

Duhet t'i caktojmë koordinatat e pikëprekjes $A(x_0, y_0)$.

Abshisa x_0 të pikëprekjes do ta caktojmë prej kushtit $k_t = f'(x_0)$.

Derivati i funksionit është $y' = (-x^2 + x + 2)' = -2x + 1$, port e x_0 është $f'(x_0) = -2x_0 + 1$ dhe kemi barazimin

$$1 = -2x_0 + 1 \text{ dhe } x_0 = 0.$$

Tani mund ta caktojmë edhe koordinatën y_0 .

$y_0 = f(x_0) = f(0) = -0^2 + 0 + 2 = 2$, d.m.th., pika e kërkuar është $A(0, 2)$. Barazimi i tangjentës është $A(0, 2)$ ose barazimi i rregulluar i tangjentës $y - 2 = 1 \cdot (x - 0)$. Me të cilën e vërtetojmë edhe zgjidhjen të fituar me aplet.

Shembulli 4. Të gjendet barazimi i tangjentës së lakores $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 3$ që është normale në drejtëzën $p: x + 3y - 4 = 0$.

Zgjidhje: Prej kushtit për normalitet të dy drejtëzave vijon se $k_t \cdot k_p = -1$ d.m.th., $k_t = -\frac{1}{k_p}$.

Koeficientin e drejtëzës p , do ta fitojmë me transformimin e drejtëzës

$$p: x + 3y - 4 = 0.$$

Vijon

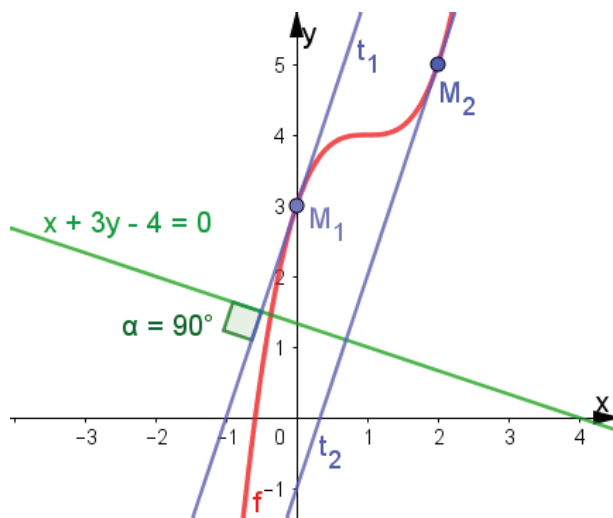
$$3y = -x + 4 \text{ d.m.th., } y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3},$$

Koeficienti i drejtimit të drejtëzës është

$$k_p = -\frac{1}{3},$$

ndërsa koeficienti i drejtimit të tangjentës

$$\text{është } k_t = -\frac{1}{-\frac{1}{3}} = 3.$$



Pikëprekjen $M(x_0, y_0)$ do ta caktojmë në të njëjtën mënyrë sit e shembulli paraprak.

Abshisa x_0 të pikëprekjes do ta caktojmë prej kushtit $k_t = f'(x_0)$.

Derivati i funksionit është $y' = (x^3 - 3x^2 + 3x + 3)' = 3x^2 - 6x + 3$, nëse te x_0 është $f'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0 + 3$ dhe e fitojmë barazimin $3 = 3x_0^2 - 6x_0 + 3$, d.m.th., $3x_0^2 - 6x_0 = 0$.

Me transformim $3x_0(x_0 - 2) = 0$ i fitojmë zgjidhjet e barazimit $x_0 = 0$ dhe $x_0 = 2$. Fitojmë se zgjidhjet, d.m.th., dy pika tek e cila tangjentat do të jenë normale te drejtëza e dhënë.

Tani mundemi t'i caktojmë edhe koordinatat y_0 .

1) $y_0 = f(x_0) = f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 + 3 = 3$, d.m.th., pika e kërkuar është $M_1(0, 3)$. Barazimi i tangjentës është $y - 3 = 3(x - 0)$ ose barazimi i rregullu i tangjentës $t_1: y = 3x + 3$.

2) $y_0 = f(x_0) = f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 3 = 5$, d.m.th., pika e kërkuar $M_2(2, 5)$. Barazimi i tangjentës është $y - 5 = 3(x - 2)$, ose barazimi i tangjentës i rregulluar $t_2: y = 3x - 1$.

BARAZIMI I NORMALES

Le të jetë dhënë funksioni $y = f(x)$ dhe pika $M(x_0, f(x_0))$ e funksionit.

Drejtëza që kalon nëpër pikën $M(x_0, f(x_0))$ dhe është normale te tangjenta së lakores në atë pikë quhet **normalja e lakores** $y = f(x)$ në pikën M .

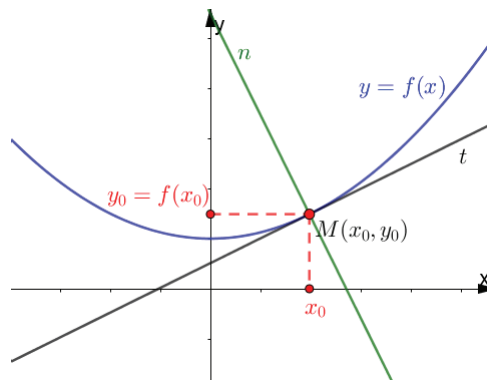
Koeficienti i drejtimit të normales $k_n = -\frac{1}{f'(x_0)}$, vijon se barazimi i normales të funksionit diferenciablel $y = f(x)$ në pikën $M(x_0, y_0)$

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Në vizatim është paraqitur grafikisht,

Barazimi i normales te grafiku i funksionit $y = f(x)$ që është diferenciablel në pikën M me koordinata x_0 dhe $y_0 = f(x_0)$ është

$$n: y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$



Shembulli 1. Të shkruhet barazimi i normales së lakores $f(x) = 5x - x^2$ në pikën M me abshisë $x = 1$.

Zgjidhje: Së pari i caktojmë koordinatat e pikës $M(x_0, y_0)$. Prej kushtit të detyrës $x_0 = 1$ dhe $y_0 = f(x_0) = f(1) = 5 \cdot 1 - 1^2 = 5 - 1 = 4$.

Vijon se, pika $M(1, 4)$ është pika prej funksionit

Derivati në çfarëdo pikë x është:

$$f'(x) = (5x - x^2)' = 5(x)' - (x^2)' = 5 \cdot 1 - 2x = 5 - 2x$$

Derivati te pika $M(1,4)$ është $f'(1) = 5 - 2 \cdot 1 = 5 - 2 = 3$.

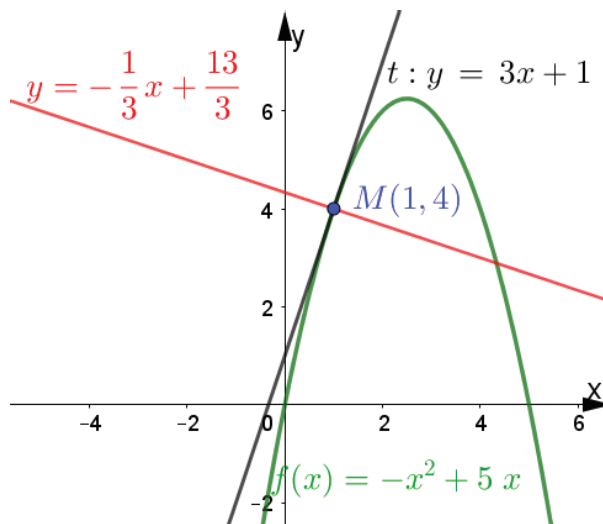
Duke zëvendësuar vlerat $x_0 = 1$, $y_0 = 4$ dhe $f'(x_0) = 3$ te barazimi i normales n , kemi:

$$y - 4 = -\frac{1}{3}(x - 1)$$

$$y - 4 = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} + 4 \text{ d.m.th.,}$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{13}{3} \text{ është barazimi i normales.}$$



Vërejtje: Normalja $y = -\frac{1}{3}x + \frac{13}{3}$ në pikën $M(1,4)$ të funksionit $f(x) = 5x - x^2$ është normale te tangjenta $y = 3x + 1$ në të njëjtën pikë $x_0 = 2$.

Shembulli 2. Të caktohet barazimi i tangjentës dhe normales së lakores $y = \frac{8}{4+x^2}$ te pika me abshisë $x_0 = 2$.

Zgjidhje: Për $x_0 = 2$ kemi

$$y_0 = f(x_0) = f(2) = \frac{8}{4+2^2} = \frac{8}{8} = 1, \text{ d.m.th., pika } M(2,1).$$

Ta caktojmë derivatin e funksionit

$$y' = \left(\frac{8}{4+x^2} \right)' = 8 \left((4+x^2)^{-1} \right)' = 8 \cdot (-1) \cdot (4+x^2)^{-2} \cdot (2x) = -\frac{16x}{(4+x^2)^2}.$$

Pastaj e kërkojmë derivatin e funksionit në pikën $x_0 = 2$, d.m.th.,

$$f'(x_0) = f'(2) = -\frac{16 \cdot 2}{(4+2^2)^2} = -\frac{32}{64} = -\frac{1}{2}.$$

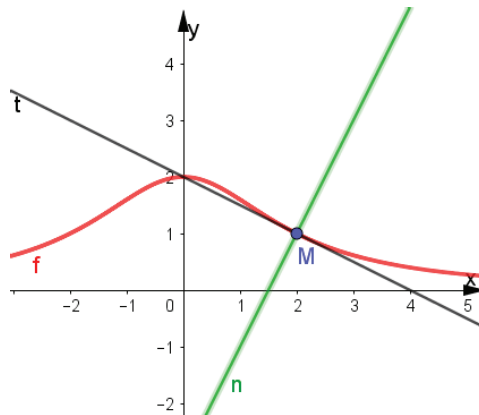
Barazimi i tangjentës të pika $M(2,1)$ është:

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 2) \text{ d.m.th., } y = -\frac{1}{2}x + 2$$

Edhe barazimi i normales është:

$$y - 1 = -\frac{1}{-\frac{1}{2}}(x - 2) \text{ d.m.th., } y = 2x - 3$$

Në vizatim grafisht është paraqitur funksioni me tangjentë dhe normale.



Shembulli 3. Të caktohet barazimi i tangjentës dhe normales së lakores $f(x) = 2x^2 - 3x$ në pikën me abshisë $x_0 = 1$.

Zgjidhje: Nëse funksioni $f(x) = 2x^2 - 3x$ zëvendësojmë $x_0 = 1$ kemi $f(1) = 2 - 3 = -1$.

Ta caktojmë derivatin $f'(x) = 4x - 3$, ndërsa nëse zëvendësojmë $x_0 = 1$, kemi $y'_0 = f'(1) = 4 - 3 = 1$.

Me zëvendësimin të formula për tangjentën kemi $y - (-1) = (x - 1)$, ndërsa me rregullimin t : $y = x - 2$.

Me zëvendësimin të formula për normalenn kemi $y - (-1) = -\frac{1}{1}(x - 1)$, ndërsa me rregullimin n : $y = -x$

Detyra për ushtrime:

1. Shkruaj barazimin e tangjentës së funksionit $y = \frac{1}{x^2}$ te pika me abshisë $x = 1$.
2. Të caktohet tangjenta e lakores $y = \sqrt{x}$ që me pjesën positive të boshtit x formon kënd prej 45° .
3. Të gjendet barazimi i tangjentës së lakores $y = x^2 + x$ dhe është normale në drejtëzën $y = -\frac{1}{2}x + 5$
4. Në cilat pika të lakores $y = -x^2 + x + 2$ tangjenta është paralele me:
 - a) boshtin x
 - b) simetralen e kuadrantit të parë dhe të tretë.

5. Shkruaje barazimin e normales së lakores $y = x^2 + 5x - 1$ te pika me abshisë $x = 1$
6. Shkruaje barazimin e tangjentës dhe normales së lakores $y = (x+1)\sqrt[3]{3-x}$ te pikat:
 - a) $A(2,3)$
 - b) $B(-1,0)$
 - c) $C(3,0)$
7. Cakto barazimin e normales së lakorese $y = x \ln x$ që është paralele me drejtëzën $y = x + 5$.
8. Të caktohet koeficienti i drejtimit të tangjentës dhe normales së lakores $y = x + 5$:
 - a) te pika me abshisë $x = 1$,
 - b) te pika me ordinatë $y = \frac{13}{2}$.
9. Në cilat pika tangjenta e lakores $y = \ln x$ është:
 - a) është normale në drejtëzën $y = -2x + 1$
 - b) paralele me drejtëzën $2x - y - 1 = 0$.
10. Të gjenden pikat me abshisa të njëjta te të cilat tangjentat e lakoreve $y = 3x^2 - 4x + 1$ dhe $y = x^3 - x - 1$ janë paralele.

7. ZBATIMI I DERIVATIT NË FIZIKË

Nëse themi se largësia prej Velezi deri në Shkup është kaluar me shpejtësi prej 80km/h , në atë rast, nënkuptohet me cilën shpejtësi mesatare ka lëvizur automobili.

Në vazhdim do të shqyrtojmë disa shembuj nga fizike.

Nëse me s e shënojmë rrugën e kaluar të pikës materiale M sipas drejtëzës p , atëherë pozita e pikës M në çdo moment prej kohës t është përcaktuar me funksionin $s = f(t)$, që në fizikë njihet si **ligji për lëvizje e trupave**.

Në momentin t pika gjendet në pozitën M_0 , ndërsa rruga e kaluar është $s_0 = f(t)$. Me ndryshimin e kohës $t + \Delta t$, pika M_0 do të gjendet në pozitën M_1 dhe rruga e kaluar është $s_1 = f(t + \Delta t)$. Kemi, se te intervali kohor Δt pika M e ka kaluar rrugën $\Delta s = s_1 - s_0$ ose $\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t)$.



Shpejtësia e pikës materiale është caktuar me formulën $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$, të njohur si shpejtësia mesatare e pikës (trupit) dhe shënohet me v_m .

Gjatë lëvizjes drejtvizore herësi $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, përkatësisht shpejtësia mesatare e pikës materiale është konstante.

Kur lëvizja e pikës materiale nuk është drejtvizore, atëherë shpejtësia ndryshon në çdo moment. Nëse rritja e kohës Δt mjaft e vogël, atëherë në momentin t përkatësisht shpejtësia mesatare do të jetë mjaft afër deri te shpejtësia momentale (e vërtetë) të trupit, e cila quhet **shpejtësia momentale** v .

Sipas ligjit për lëvizje $s = f(t)$, shpejtësia momentale v në kohën t është vlera kufitare e shpejtësisë mesatare, nëse ekziston kur $\Delta t \rightarrow 0$, d.m.th.,

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{sr} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t).$$

Fituam se shpejtësia momentale e pikës materiale (trupit) që lëviz sipas ligjit $s = f(t)$ është e barabartë me vlerën e derivatit të funksionit $f(t)$ sipas ndryshores t në momentin t_0 , d.m.th., $v = f'(t_0)$

Le të jetë t koha në të cilën është caktuar shpejtësia momentale $v = f'(t)$. Ndryshimi i shpejtësisë për ndryshimin e kohës Δt , mund ta caktojmë $\Delta v = f'(t + \Delta t) - f'(t)$.

Prej fizikës, është e njohur se herësi $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ e jep nxitimin mesatar të pikës materiale në intervalin $[t, t + \Delta t]$ dhe $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$ është nxitimi momental i shënuar me a në momentin t , d.m.th.,

$$a = v' = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f'(t + \Delta t) - f'(t)}{\Delta t} = f''(t).$$

Kemi se nxitimi i pikës materiale (trupit) që lëviz sipas ligjit $s = f(t)$ është vlera e derivatit të dytë të funksionit $f(t)$ sipas ndryshimit të t në momemntin t_0 , d.m.th., $a = f''(t_0)$.

Shembulli 1. Një trup lëviz drejtvizorisht me ligjin $s(t) = t^3 - 6t^2 + 2t$, ku S matet në metro, ndërsa t në sekonda. Gjeje shpejtësinë dhe nxitimin e trupit në fund të sekondës së tretë $t = 3s$.

Zgjidhje: Prej kushtit të detyrës $t = 3s$.

T'i caktojmë derivatet e funksionit dhe të zëvendësojmë vlerat e t .

Derivati i parë është $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 12t + 2$ dhe me zëvendësim të vlerës së t kemi $v(3) = s'(3) = 27 - 36 + 2 = -7$ d.m.th., $v = -7 \text{ m/s}$.

Derivati i dytë është $a(t) = v'(t) = 6t - 12$ dhe me zëvendësimin e vlerës së t kemi $a(3) = v'(3) = 18 - 12 = 6$ d.m.th., $a = 6 \text{ m/s}^2$.

Shembulli 2. Dihet se rruga e kaluar gjatë rënies së lire të trupit gjendet sipas formulës $s = \frac{1}{2}gt^2$, ku $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ është nxitimi i tokës. Të caktohet shpejtësia dhe nxitimi i trupit gjatë rënies së lire në kohën $t = 5s$.

Zgjidhje: Dy derivatet e para të funksionit janë: $s' = gt$ dhe $s'' = g$.

Në kohën $t = 5s$, shpejtësia do të jetë $v(5) = s'(5) = g \cdot 5 = 9.81 \cdot 5 = 49.05 \text{ m/s}$, që do të thotë se në fund të sekondës së pestë shpejtësia e trupit do të jetë 49.05 m/s .

Në kohën $t = 5s$, nxitimi do të jetë $a(5) = s''(5) = g = 9.81 \text{ m/s}^2$, që do të thotë se nxitimi gjatë rënies së lire gjithmonë është konstant dhe është 9.81 m/s^2 .

Detyra për ushtrime:

1. Një trup lëviz drejtvizorisht me ligjin $s(t) = 4t^3 - 4t^2 + 5$. Gjeje shpejtësinë dhe nxitimin e trupit në kohën: a) $t = 2s$, b) $t = 10s$

- 210

8. ZBATIMI I DERIVATIT. SHQYRTIMI I VIJIMIT TË GRAFIKUT TË FUNKSIONIT.

SHQYRTIMI I MONOTONISË SË FUNKSIONIT

Me konceptin monotonia e funksionit, d.m.th., rritja dhe zvogëlimi i funksionit u njoftuam në njësinë e dytë modulare.

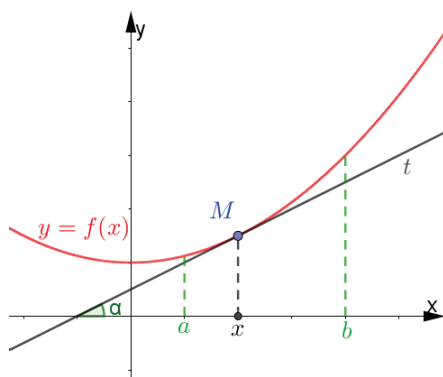
Të përkujtohem në përkufizimin e monotonisë.

Përkufizimi. Për funksionin $f(x)$ me fushën e përkufizimit D_f dhe intervalin (a,b) i cili zvogëlohet te fusha e përkufizimit, themi se:

- është rigorozisht **monotone rritëse** në intervalin (a,b) , nëse për çfarëdo $x_1, x_2 \in (a,b)$ të atillë që $x_1 < x_2$, vlen $f(x_1) < f(x_2)$,
- është rigorozisht **monotone zvogëluuese** në intervalin (a,b) , për çfarëdo $x_1, x_2 \in (a,b)$ të atillë që $x_1 < x_2$ vlen $f(x_1) > f(x_2)$.

Tani do të shikojmë se si me ndihmën e derivatit të funksionit mund ta shqyrtojmë monotoninë e funksionit.

Le të jenë dhënë funksionet $y = f(x)$ dhe $y = g(x)$ në intervalet (a,b) dhe (c,d) përkatësisht.



Vërejmë se tangjenta te pika M e lakores $y = f(x)$ që është grafiku i funksionit që është rritës në intervalin (a,b) formon kënd të ngushtë α me pjesën positive të boshtit x , d.m.th., $\text{tg}\alpha > 0$.

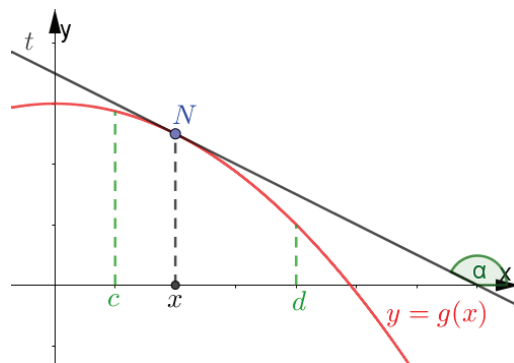
Prej përkufizimit për koeficientin e drejtimit të tangjentës vijon se për çdo $x \in (a,b)$,

$$f'(x) = k_t = \text{tg}\alpha > 0.$$

Tangjenta te pika N të lakores $y = g(x)$ që është grafiku i funksionit që është zvogëlues në intervalin (c,d) formon kënd të ngushtë α me pjesën positive të boshtit x , d.m.th., $\text{tg}\alpha < 0$.

Prej përkufizimit të koeficientit të drejtimit të tangjentës vijon se për çdo $x \in (c,d)$,

$$g'(x) = k_t = \text{tg}\alpha < 0.$$



Tani, mund ta shprehim këtë përkufizim:

Përkufizimi. Funkzioni $y = f(x)$ që është diferenciable në çdo pikë prej intervalit (a, b) ,

- është rigorozisht **monotone rritëse** në intervalin nëse dhe vetëm nëse $f'(x) > 0$ për çdo $x \in (a, b)$,
- është rigorozisht **monotone zvogëlues** në intervalin nëse dhe vetëm nëse $f'(x) < 0$ për çdo $x \in (a, b)$
- është konstante në intervalin nëse dhe vetëm nëse $f'(x) = 0$ për çdo $x \in (a, b)$.

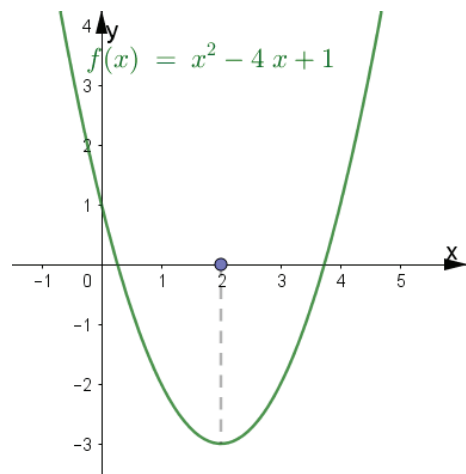
Shembulli 1. Të shqyrtohet monotonia e funksionit $f(x) = x^2 - 4x + 1$.

Zgjidhje: Fusha e përkufizimit të funksionit $f(x) = x^2 - 4x + 1$ është $D_f = \mathbb{R}$. E caktojmë derivatin e funksionit $f'(x) = 2x - 4$.

Për ta caktuar intervalin në të cilin funksioni është rritës e zgjidhim pabarazimin $f'(x) > 0$ vijon $2x - 4 > 0$ prej ku vijon se $x > 2$ d.m.th., $x \in (2, +\infty)$.

Për ta caktuar intervalin në të cilin funksioni është zvogëlues e zgjidhim pabarazimin $f'(x) < 0$ vijon $2x - 4 < 0$ prej ku vijon se $x < 2$ d.m.th., $x \in (-\infty, 2)$.

Domethënë, funksioni **rritet** për $x \in (2, +\infty)$ dhe **zvogëlohet** për $x \in (-\infty, 2)$.



Shembulli 2. Të shqyrtohet monotonia e funksionit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$.

Zgjidhje: Fusha e përkufizimit të funksionit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ është $D_f = \mathbb{R}$. E caktojmë derivatin e funksionit $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$.

Për ta caktuar intervalin në të cilin funksioni është rritës e zgjidhim pabarazimin $f'(x) > 0$ prej ku vijon se $3x^2 - 12x + 9 > 0$.

Zgjidhja e barazimit $3x^2 - 12x + 9 = 0$ janë $x_1 = 1$ dhe $x_2 = 3$. Duke shfrytëzuar mënyrën për zbërthim të katrorit të trinomit e kemi pabarazimin $3(x-1)(x-3) > 0$

Shenja e shprehjeve $x-1$ dhe $x-3$ është:

$x-1 > 0$ (shprehja është pozitive), për $x > 1$ dhe $x-1 < 0$ (shprehja është negative), për $x < 1$
 $x-3 > 0$ për $x > 3$ dhe $x-3 < 0$, për $x < 3$.

Rezultatet mund t'i fusim te tabela ndihmëse dhe të caktojmë shenjën e derivatit të parë. Te kolona e çdonjërit prej intervaleve ku shprehja është positive shkruajmë "+", port e intervalet ku shprehja është negative shkruajmë "-".

xx	$-\infty$	1	3	$+\infty$
interval	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, +\infty)$	
$x-1$	-	+	+	
$x-3$	-	-	+	
$f'(x) = 3(x-1)(x-3)$	+	-	+	
Monotoni	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

Shenja e derivatit $f'(x)$ te tabela fitohet me shumëzimin r shenjave të shumëzuesve $x-1$ dhe $x-3$. Pasi 3 është numër pozitiv nuk e ndryshon shenjën e prodhimit.

Varësisht prej shenjës $f'(x)$ kemi se:

nëse shenja është "+", d.m.th., $f'(x) > 0$, atëherë kemi interval ku funksioni rritet,

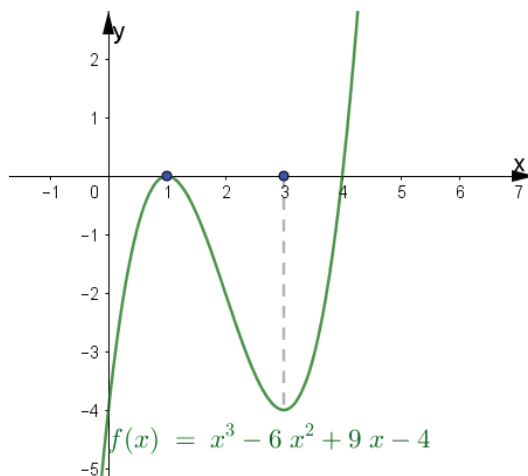
nëse shenja është "-", d.m.th., $f'(x) < 0$, atëherë kemi interval ku funksioni zvogëlohet,

Prej tabelës mund të lexojmë se:

Funksioni $y = f(x)$ monotonisht rritet në intervalin $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$,

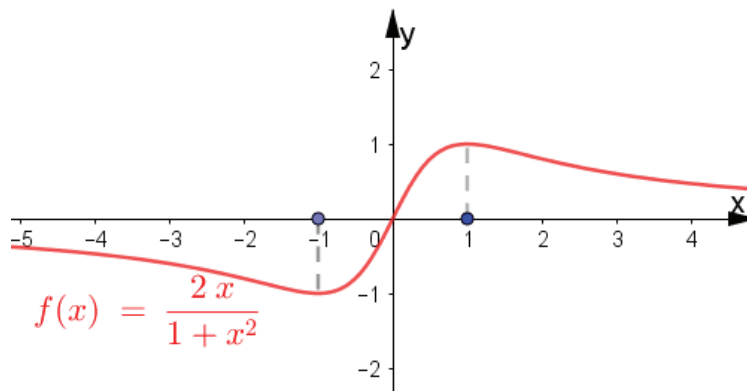
Funksioni $y = f(x)$ monotonisht zvogëlohet në intervalin $(1, 3)$.

Në vizatim grafikisht është paraqitur funksioni me intervalet e monotonisë.



Shembulli 3. Të shqyrtohet monotonia e funksionit $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

Zgjidhje: te vizatimi grafikisht është paraqitur funksioni



Funksioni $y = f(x)$ monotonisht rritet në intervalin $(-1,1)$,

Funksioni $y = f(x)$ monotonisht zvogëlohet në intervalin $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Detyra për ushtrime:

1. Gjeji intervalet ku funksionet rriten, përkatësisht zvogëlohen:

a) $f(x) = 1 - x^2$

b) $f(x) = (x - 3)^2$

c) $f(x) = x^2 - 2x$

ç) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

2. Gjeji intervalet ku funksionet rriten, përkatësisht zvogëlohen:

a) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 7$

b) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 2$

c) $f(x) = x^4 - 8x^2$

ç) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + 3$

3. Gjeji intervalet ku funksionet rriten, përkatësisht zvogëlohen:

a) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

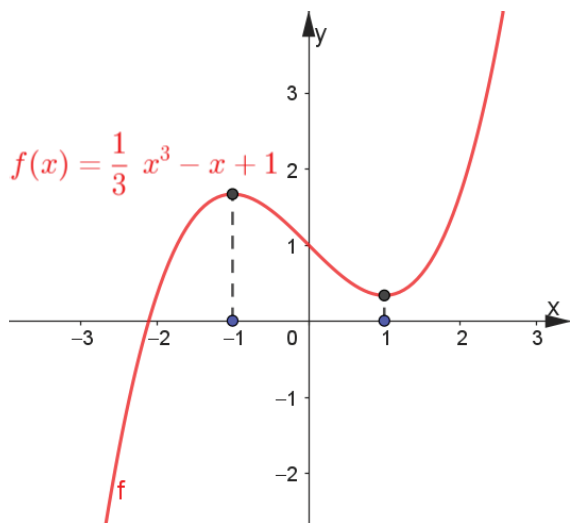
b) $f(x) = \frac{3x}{x^2 + x + 1}$

$$c) f(x) = \frac{5x^2 + 8x - 1}{x^2 + 1}$$

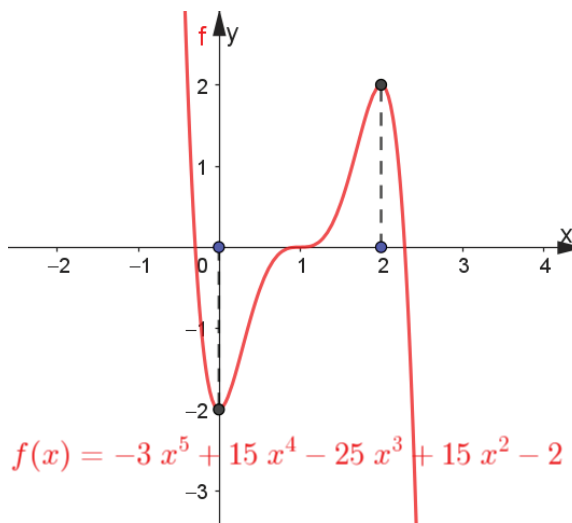
$$\zeta) f(x) = \ln \sqrt{1+x^2}$$

4. Shkruaj intervalet e monotonisë direkt prej grafikut të funksioneve të dhëna

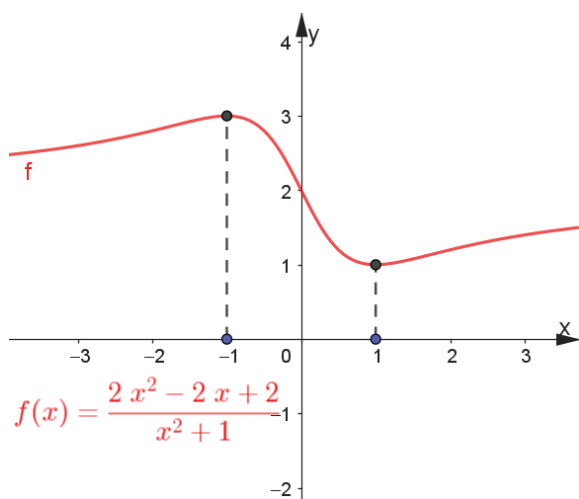
$$a) f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 1$$



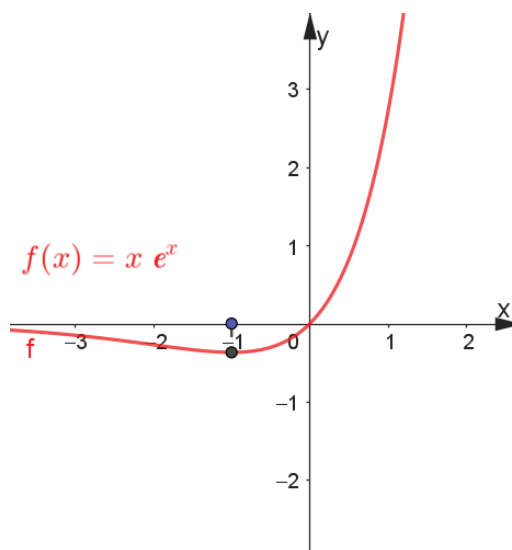
$$b) f(x) = -3x^5 + 15x^4 - 25x^3 + 15x^2 - 2$$



$$c) f(x) = \frac{2x^2 - 2x + 2}{x^2 + 1}$$



$$\zeta) f(x) = xe^x$$



SHQYRTIMI I VLERAVE EKSTREME TË FUNKSIONIT

Le të jetë dhënë funksioni $y = f(x)$ që është përkufizuar në intervalin (a, b) . Pkat e grafiut të funksionit ku ndryshon monotonja e funksionit quhen **vlerat ekstreme** ose **ekstremet e funksionit**.

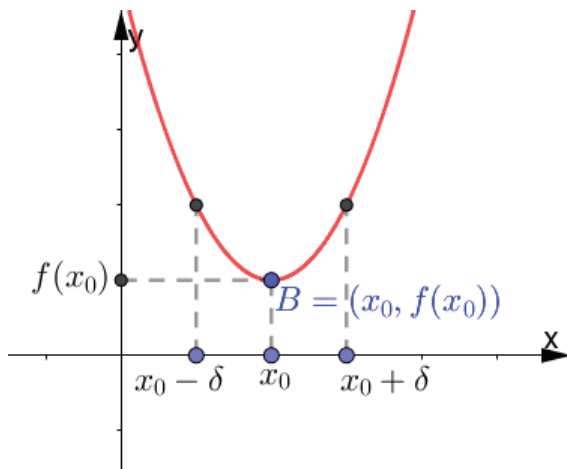
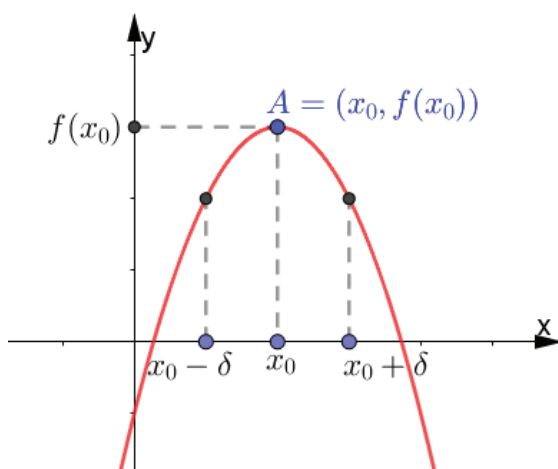
Te ato pika funksioniu arrin vlerë më të madhe (më të vogël), ndërsa në nivel lokal, vetëm në ato pika.

Përkufizimi. Funksioni $y = f(x)$ në pikën $x = x_0$ dhe $x \in (a, b)$ ka **ekstrem lokal të barabartë me** $f(x_0)$, nëse ekziston rrethinë Δ të pikës x_0 , $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, ashtu që për çdo x i kësaj rrethine është plotësuar:

$f(x_0) \geq f(x)$, atëherë në pikën $(x_0, f(x_0))$ ka **maksimum lokal**,

$f(x_0) \leq f(x)$, atëherë në pikën $(x_0, f(x_0))$ ka **minimum lokal**.

Në vizatim janë paraqitur ekstremet të grafikëve të funksioneve.



Këto ekstreme të karakterit lokal, pasi funksioni nuk e arrin vlerën e tij më të madhe dhe më të vogël në të gjithë fushën e përkufizimit. Ato janë pika ku ndryshon vijimi i funksionit, prej rritjes në zvogëlim dhe anasjelltas.

Te shembujt vijues do të shqyrtojmë vetinë e derivatit të funksionit në rrethinën e pikës x_0 në pikën x_0 tek e cila do të kemi vlerë ekstreme.

Shembulli 1. Cakto vlerat ekstreme të funksionit $f(x) = -x^2 + 4x$.

Zgjidhje: Ta caktojmë derivatin e funksionit, $f'(x) = -2x + 4$

$f'(x) > 0$, nëse $-2x + 4 > 0$ d.m.th., $x < 2$. Vijon se për $x \in (-\infty, 2)$ funksioni rritet.

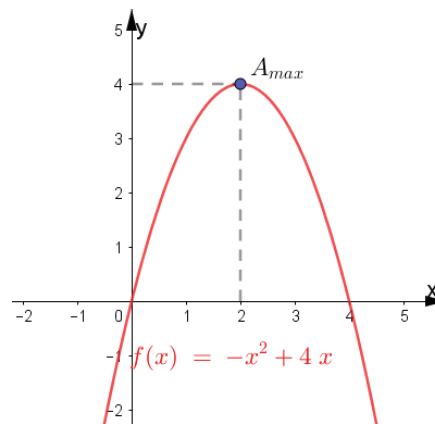
$f'(x) < 0$, nëse $-2x + 4 < 0$ d.m.th., $x > 2$. Vijon se për $x \in (2, +\infty)$ funksioni zvogëlohet.

Për $x = 2$, $f'(2) = 0$.

Domethënë, kur argumenti x kalon nëpërmjet pikës $x_0 = 2$, derivati i parë e ndryshon shenjën prej pozitiv në negative, pra funksioni ka maksimum në $x_0 = 2$ që është

$y_{\max} = f(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 = 4$ d.m.th., në pikën

$A = (2, 4)$ funksioni ka maksimum $A_{\max}$



Shembulli 2. Cakto vlerat ekstreme të funksionit $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

Zgjidhje: Ta caktojmë derivatin e funksionit, $f'(x) = 2x - 4$.

$f'(x) > 0$, nëse $2x - 4 > 0$ d.m.th., $x > 2$. Vijon se për $x \in (2, +\infty)$ funksioni rritet.

$f'(x) < 0$, nëse $2x - 4 < 0$ d.m.th., $x < 2$. Vijon se për $x \in (-\infty, 2)$ funksioni zvogëlohet.

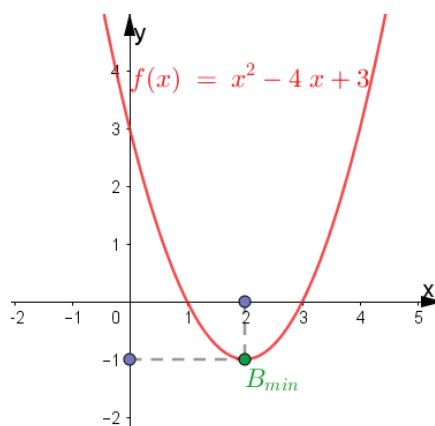
Për $x = 2$, $f'(2) = 0$.

Domethënë, kur argumenti x kalon nëpërmjet pikës $x_0 = 2$, derivati i parë e ndryshon shenjën prej negativ në pozitiv, pra funksioni ka minimum në $x_0 = 2$ që është

$y_{\min} = f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$ d.m.th.,

në pikën $B = (2, -1)$ funksioni ka minimum

$B_{\min}$



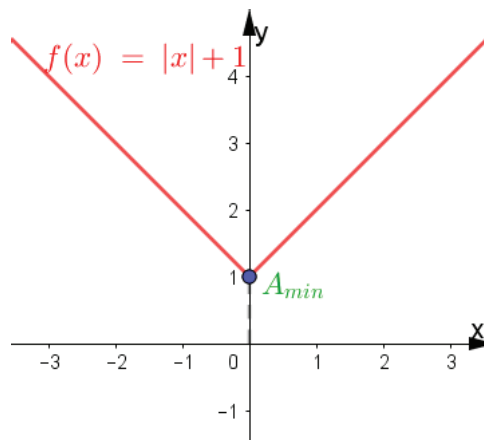
Vërejtje: Nëse funksioni $y = f(x)$ ka ekstrem në pikën x_0 , atëherë ose $f'(x_0) = 0$ ose nuk ekziston.

Shembulli 3. Të caktohet ekstreme i funksionit $f(x) = |x| + 1$.

Zgjidhje: Grafiku i funksionit është paraqitur nga e djathta.

Funksioni në intervalin $(-\infty, 0)$ zvogëlohet, ndërsa në intervalin $(0, +\infty)$ rritet. Për $x = 0$, vlera e funksionit është $f(0) = 1$. Funksioni ka minimum në pikën $A = (0, 1)$.

Por funksioni nuk është diferenciable në pikën $x = 0$, pasi nga e majta $f'(0) = -1$, ndërsa nga e djathta $f'(0) = 1$.



Vërejtje: Në vazhdim do të shqyrtojmë shembuj ku funksioni është diferenciable në pikën ku ka ekstrem.

Në bazë të shembujve paraprak mund të përkufizojmë mënyrë me të cilën i caktojmë ekstremet e funksionit $y = f(x)$.

Mënyra për caktimin e ekstremit të funksionit $y = f(x)$

- 1) Caktohet derivati i parë $f'(x)$ zgjidhet barazimi $f'(x) = 0$ dhe gjenden zgjidhjet $x = x_i$ për $i = 1, 2, 3, \dots$ nëse ekzistojnë. Caktohen pikat $(x_i, f(x_i))$, të cilat janë pika stacionare dhe ekstreme të mundshme.
- 2) E shqyrtojmë shenjën e $f'(x)$ në rrethinën e pikes $x = x_i$, dhe poashtu:
 - Nëse shenja e $f'(x)$ ndryshon prej $f'(x) < 0$ (prej negatives), në $f'(x) > 0$ (në pozitive), atëherë funksioni $f(x)$ ka minimum në pikën $(x_i, f(x_i))$,
 - Nëse shenja e $f'(x)$ ndryshon prej $f'(x) > 0$ (prej pozitives), në $f'(x) < 0$ (në negative), atëherë funksioni $f(x)$ ka maksimum në pikën $(x_i, f(x_i))$,
 - Nëse shenja e $f'(x)$ ndryshon, atëherë funksioni $f(x)$ nuk ka ekstrem në pikën $(x_i, f(x_i))$.

Shembulli 4. Të gjenden ekstremet e funksionit $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

Zgjidhje: Së pari derivatin e funksionit $f(x) = x^2 - 2x - 3$ është $f'(x) = 2x - 2$. Pastaj e barazojmë derivatin e parë me zero $2x - 2 = 0$ dhe e gjejmë abshisëne pikës stacionate $2x = 2$, d.m.th., $x = 1$.

E gjejmë ordinatën e pikës stacionare

$$f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = -4.$$

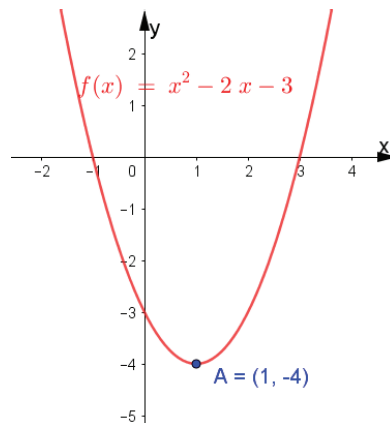
Ajo është pika $A(1, -4)$.

Për të caktuar vallë në pikën A funksioni ka ekstrem e shqyrtojmë shenjën e derivatit të parë në intervalin $(-\infty, 1)$ dhe $(1, +\infty)$.

Për $x \in (-\infty, 1)$, derivati i parë $f'(x) < 0$, pra funksioni zvogëlohet.

Për $x \in (1, +\infty)$, derivati i parë $f'(x) > 0$, pra funksioni rritet.

Vijon në pikën $A(1, -4)$ funksioni $f(x) = x^2 - 2x - 3$ ka minimum.



Shembulli 5. Të caktohet ekstremi i funksionit $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$.

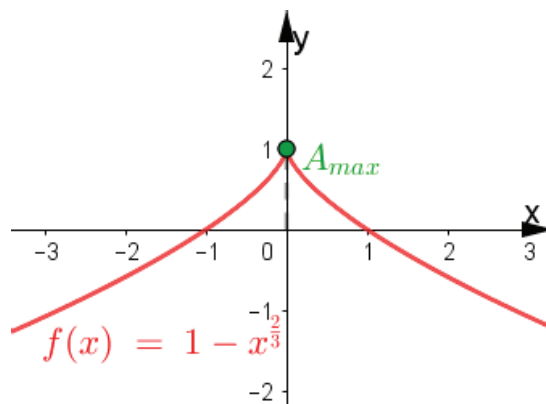
Zgjidhje: E gjejmë derivatin e parë të funksionit $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$, që është $f'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$. E barazojmë derivatin e parë me zero $-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = 0$ d.m.th., $-2 = 0$ barazimi nuk ka zgjidhje., ndërsa derivati i parë nuk ekziston për $x = 0$, ndërsa vlera e funksionit është $f(0) = 1 - \sqrt[3]{0^2} = 1$. Kemi pikën $A(0, 1)$

Për të caktuar vallë në pikën A funksioni ka ekstrem e shqyrtojmë shenjën e derivatit të parë në intervalet $(-\infty, 0)$ dhe $(0, +\infty)$.

Për $x \in (-\infty, 0)$, derivati i parë $f'(x) > 0$, pra funksioni rritet.

Për $x \in (0, +\infty)$, derivati i parë $f'(x) < 0$, pra funksioni zvogëlohet.

Vijon në pikën $A(0, 1)$ funksioni $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ ka maksimum.



Vërejtje: Te shembujt 3 dhe 5 funksioni nuk është përkufizuar në pikën ku ka ekstrem.

Nëse funksioni $y = f(x)$ është dy herë diferenciable në pikën x_0 , atëherë mënyra për caktimin e vlerave ekstreme mund të realizohet dhe me zbatim të derivatit të dytë.

Funksioni $y = f(x)$ le të ketë derivate të parë dhe të dytë në pikën x_0 . Me shenjën e derivatit të parë $f'(x)$ mund të caktojmë se funksioni $f(x)$ rritet ose zvogëlohet në rrethinën e pikës x_0 . Në mënyrë të ngjashme me ndihmën e shenjës së derivatit të dytë $f''(x)$ mund të caktojmë vallë $f'(x)$ rritet ose zvogëlohet në rrethinën e pikës x_0 .

Në pikën x_0 funksioni le të ketë maksimum. Kjo do të thotë se derivati i parë i funksionit majtas prej pikës x_0 është pozitiv (pasi funksioni rritet), në x_0 vlera është 0 dhe djathtas prej pikës x_0 është negative (pasi funksioni zvogëlohet, atëherë derivati i parë zvogëlohet. Prej përkufizimit për monotoni vijon se derivati i funksionit $f'(x)$ që është $f''(x)$ negative d.m.th., $f''(x) < 0$ në rrethinën e pikës x_0 .

Ngjashëm, në pikën x_0 funksioni le të ketë minimum. Kjo do të thotë se derivati i parë i funksionit majtas prej pikës x_0 është negative (pasi funksioni zvogëlohet) në x_0 vlera është 0 dhe djathtas prej pikës x_0 është pozitiv (pasi funksioni rritet), atëherë derivati i parë rritet. Prej përkufizimit të monotonies vijon, derivati i funksionit $f'(x)$ që është $f''(x)$ është pozitiv, d.m.th., $f''(x) > 0$ në rrethinën e pikës x_0 .

Duke e shfrytëzuar këtë ky mendim, mund të shkruajmë edhe një mënyrë për caktimin e ekstremit të funksionit.

Mënyra e dytë për caktimin e **ekstrem**it të funksionit $y = f(x)$

1) Caktohet derivati i parë $f'(x)$, zgjidhjet barazimi $f'(x) = 0$ dhe gjenden zgjidhjet $x = x_i$ për $i = 1, 2, 3, \dots$ nëse ekzistojnë. Caktohen pikat $(x_i, f(x_i))$, të cilat janë pika stacionare dhe pika të mundshme për ekstrem.

2) Caktohet derivati i dytë $f''(x)$ dhe njehsohet $f''(x_i)$.

Nëse $f''(x_i) < 0$, atëherë $f(x)$ ka maksimum lokal në pikën $(x_i, f(x_i))$,

Nëse $f''(x_i) > 0$, atëherë $f(x)$ ka minimum lokal në pikën $(x_i, f(x_i))$,

Nëse $f''(x_i) = 0$, atëherë nuk mundet të caktohet ekstremi.

Shembulli 6. Të caktohen ekstremet e funksionit $f(x) = x^2 - 2x - 3$. (Funksioni është i njëjtë prej shembullit 4, ndërsa tani do të zgjidhim me mënyrën e dytë)

Zgjidhje: E gjejmë derivatin e parë të funksionit $f(x) = x^2 - 2x - 3$ që është $f'(x) = 2x - 2$.

E barazojmë derivatin e parë me zero $2x - 2 = 0$ dhe e gjejmë abshisën e pikës stacionare $2x = 2$ d.m.th., $x = 1$.

E gjejmë ordinatën e pikës stacionare

$$f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = -4.$$

Pika është $A(1, -4)$.

E gjejmë derivatin e dytë të funksionit

$$f''(x) = 2.$$

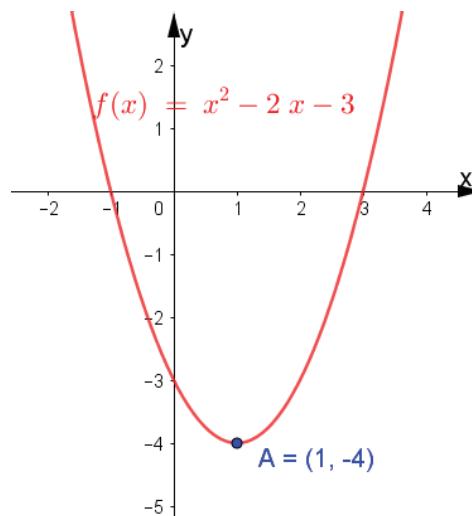
E shqyrtojmë shenjën e derivatit të dytë te

$$x = 1, \quad f''(1) = 2 > 0.$$

Vijon, funksioni $f(x)$ ka minimum te pika

$$A(1, -4).$$

Në vizatim është paraqitur grafiku i funksionit.



Shembulli 7. Të gjenden ekstremet e funksionit $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$.

Zgjidhje: E gjejmë derivatin e parë të funksionit $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$ që është

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^2 - 3)'(x - 2) - (x^2 - 3)(x - 2)'}{(x - 2)^2} = \frac{2x(x - 2) - (x^2 - 3) \cdot 1}{(x - 2)^2} = \\ &= \frac{2x^2 - 4x - x^2 + 3}{(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2}. \end{aligned}$$

E barazojmë derivatin e parë me zero dhe e gjejmë abshisën e pikës stacionare $f'(x) = 0$

$$\text{d.m.th., } \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2} = 0.$$

Thyesa do të jetë e barabartë me 0 nëse numëruesi është i barabartë me 0, d.m.th.,

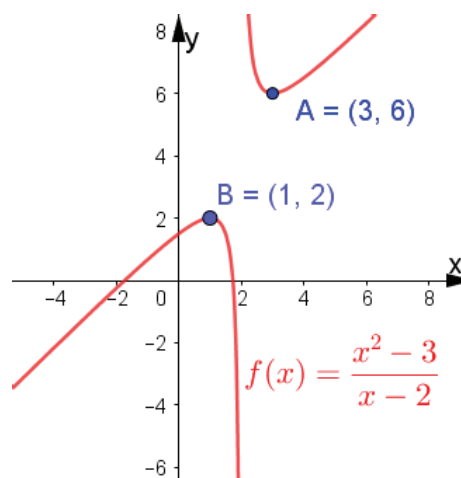
$$x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Zgjidhjet e barazimit janë $x_1 = 3$ dhe $x_2 = 1$.

I gjejmë ordinatat e pikave stacionare

$$f(3) = \frac{6}{1} = 6 \text{ dhe } f(1) = \frac{-2}{-1} = 2.$$

Pikat stacionare janë $A(3, 6)$ dhe $B(1, 2)$



E gjejmë derivatin e dytë të funksionit,

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \frac{(x^2 - 4x + 3)'(x-2)^2 - (x^2 - 4x + 3)((x-2)^2)'}{(x-2)^4} = \\
 &= \frac{(2x-4)(x-2)^2 - (x^2 - 4x + 3) \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{(x-2)((2x-4)(x-2) - 2(x^2 - 4x + 3))}{(x-2)^4} = \\
 &= \frac{(x-2)(2x^2 - 4x - 4x + 8 - 2x^2 + 8x - 6)}{(x-2)^4} = \frac{2}{(x-2)^3}
 \end{aligned}$$

E shqyrtojmë shenjën e derivatit të dytë në ato pika:

$$\text{Te pika e dytë } A(3,6), \quad f''(3) = \frac{2}{(3-2)^3} = 2 > 0,$$

$$\text{dhe te pika } B(1,2), \quad f''(1) = \frac{2}{(1-2)^3} = -2 < 0.$$

Vijon, te pika $A(3,6)$ funksioni $f(x)$ ka minimum, ndërsa në pikën $B(1,2)$ funksioni $f(x)$ ka maksimum. Ekstremet grafikisht janë paraqitur te figura.

Detyra për ushtrime:

1. Të gjenden ekstremet e funksionit me mënyrën e parë:

$$\text{a) } f(x) = \frac{x^2 - 7}{x + 4}$$

$$\text{b) } f(x) = x + \frac{1}{x}$$

$$\text{c) } f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$$

$$\text{ç) } f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$$

$$\text{d) } f(x) = \frac{x-2}{x}$$

$$\text{dh) } f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$$

2. Të gjenden ekstremet e funksionit me mënyrën e parë:

$$\text{a) } f(x) = \frac{5-x^2}{x+3}$$

$$\text{b) } f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

c) $f(x) = 1 + x + x^2 - x^3$

ç) $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$

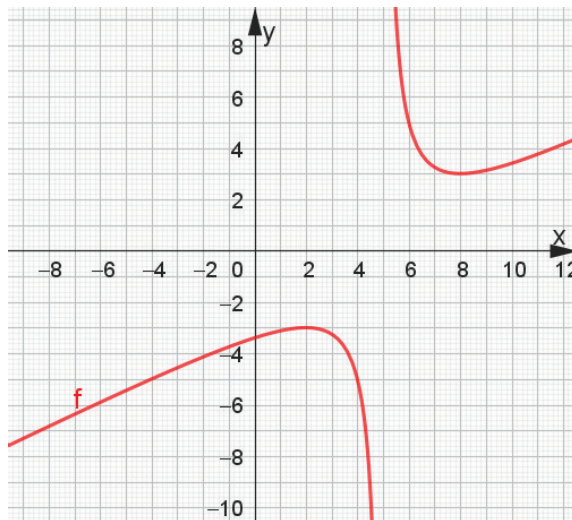
d) $f(x) = 4 - 9x + 6x^2 - x^3$

dh) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$

3. Të gjenden ekstremet e funksionit

$$f(x) = \frac{34 - 10x + x^2}{2x - 10}$$

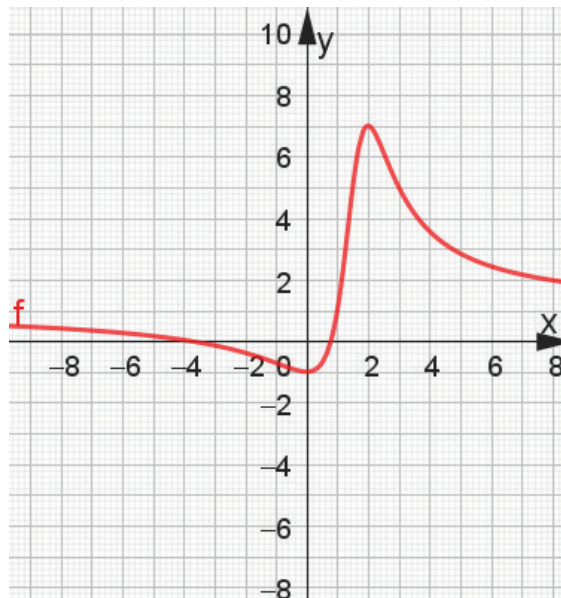
dhe sipas grafikut (pa gjetjen e derivatit të dytë) të caktohet karakteri i tyre. Ekstremet lokale të shënohen te grafiku.



4. Të gjenden ekstremet lokale të funksionit

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x - 3}{x^2 - 3x + 3}$$

dhe sipas grafikut (pa gjetjen e derivatit të dytë) të caktohet karakteri i tyre. Ekstremet lokale të shënohen te grafiku



SHQYRTIMI I KONVEKSITETIT DHE KONKAVITETIT TË FUNKSIONIT. PIKAT E INFLEKSIONIT TË FUNKSIONIT

Paraprakisht, konstatuam se monotonia e funksionit mund të caktohet sipas shenjës së derivatit të parë. Derivati i dytë, përkatësisht shenja e tij, gjithashtu është lidhur me një veti gjeometrike të grafikut të funksionit, ndërsa ajo është lakimi i funksionit (dalja/futja).

Përkufizimi.

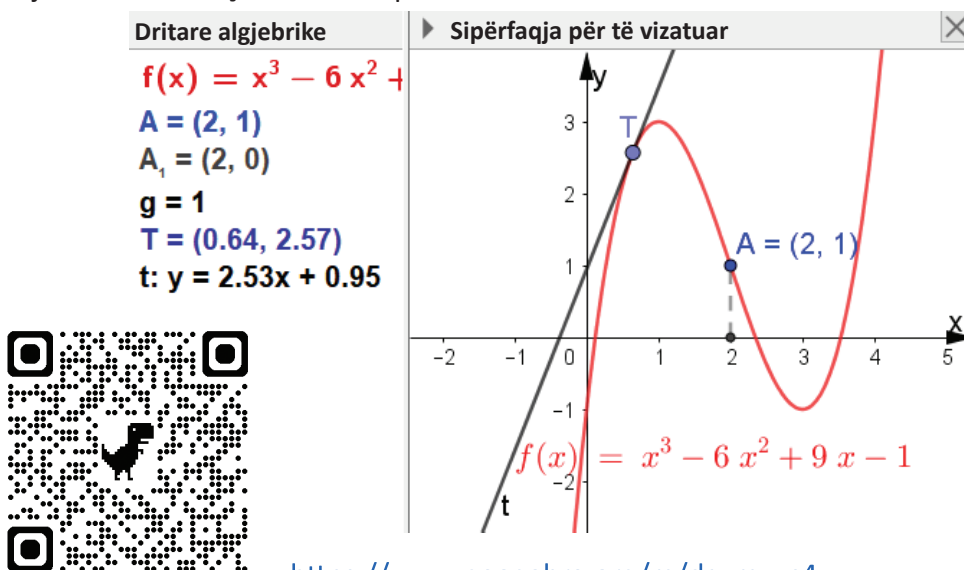
- Funksioni $y = f(x)$ është **konkav** (i futur), në intervalin (a, b) , nëse për çdo pikë $x_0 \in (a, b)$ pjesa prej lakores në atë interval është mbi tangjentën e tërhequr te pika $M_0(x_0, f(x_0))$.
- Funksioni $y = f(x)$ është **konveks** (i dalë), në intervalin (a, b) , nëse për çdo pikë $x_0 \in (a, b)$ pjesa prej lakores në atë interval është nën tangjentën e tërhequr te pika $M_0(x_0, f(x_0))$.

Si me ndihmën e derivatit të caktojmë konveksitetin dhe konkavitetin e funksionit?

Për caktimin e intervaleve të konveksitetit dhe konkavitetit të funksionit të dhënë $y = f(x)$ mund ta shfrytëzojmë derivatin e dytë të funksionit.

Ta shqyrtojmë lakoren $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.

Nxënësit mund ta shfrytëzojnë apletin dhe ta zhvendosin pikën T . Ta vërejmë pozitën e tangjentës në lidhje me lakoren. Çka mund të përfundohet?



<https://www.geogebra.org/m/dqzms4>

Derivati i parë dhe i dytë të funksionit janë $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ dhe $f''(x) = 6x - 12$. Nëse derivatin e dytë e barazojmë me 0, $f''(x) = 0$, e fitojmë barazimin $6x - 12 = 0$. Zgjidhje e barazimit është $x = 2$.

Prej fushës së përkufizimit e largojmë pikën stacionare të derivati i dytë dhe e ndajmë në dy interval $(-\infty, 2)$ dhe $(2, +\infty)$.

Nëse marrim dy vlera $x_1, x_2 \in (-\infty, 2)$, ashtu që $x_1 < x_2$, atëherë vlerat e derivatit të parë $f'(x_1) > f'(x_2)$, d.m.th., vlera e derivatit të parë do të zvogëlohet prandaj $f''(x) < 0$. Gjithashtu, nëse e shqyrtojmë tangjentën e funksionit në këtë interval, grafiku i funksionit gjendet nën tangjentën në të gjithë intervalin.

Nga ana tjetër, për $x \in (-\infty, 2)$, vlera e derivatit të dytë është $f''(x) < 0$.

Vijon funksioni $y = f(x)$ është konveks (i dalë) në intervalin $(-\infty, 2)$.

Nëse marrim dy vlera $x_1, x_2 \in (2, +\infty)$, ashtu që $x_1 < x_2$, atëherë vlerat e derivatit të parë $f'(x_1) < f'(x_2)$, d.m.th., vlera e derivatit të parë do të rritet prandaj $f''(x) > 0$. Gjithashtu, nëse e shqyrtojmë tangjentën e funksionit në këtë interval, grafiku i funksionit gjendet mbi tangjentën në të gjithë intervalin.

Nga ana tjetër, për $x \in (2, +\infty)$, vlera e derivatit të dytë është $f''(x) > 0$.

Vijon funksioni $y = f(x)$ është konkav (i futur) në intervalin $(2, +\infty)$.

Si quhet pika ku derivati i dytë është i barabartë me 0 dhe në intervalet majtas dhe djathtas prej tij shenja e derivatit të dytë është i ndryshëm?

Përkufizimi. Pikat e lakores që e ndajnë intervalin ku lakorja e ndryshon lakimin e saj – prej daljes në hyrje dhe anasjelltas quhet **pika e infleksionit** të lakores.

Mënyra për caktimin e **pikave të infleksionit** dhe intervalet e daljes dhe hyrjes.

- 1) Caktohen pikat pikave të infleksionit $(x_i, f(x_i))$ të $i = 1, 2, 3, \dots$ cilat janë pika të mundshme të infleksionit me zhvendosje të $f''(x)$ dhe zgjidhja e barazimit $f''(x) = 0$,
- 2) Pikat e gjetura (zgjidhje) të barazimit $f''(x) = 0$ i radhisim sipas madhësisë dhe e caktojmë shenjën e $f''(x)$ në çdo interval ndërmjet rrënjëve të fituara prej barazimit. Poashtu:
 - Në intervalin ku $f''(x) < 0$, funksioni është i dalë (konveks),
 - Në intervalin ku $f''(x) > 0$, funksioni është i futur (konkav),
 - Nëse $f''(x)$ e ndryshon shenjën gjatë kalimit nëpër ndonjë prej rrënjëve të fituara, atëherë ajo vlerë është abshisa e **pikës së infleksionit**.

Shembulli 1. Të caktohen intervalet e konveksitetit dhe konkavitetit dhe pikat e infleksionit të funksionit $f(x) = -2x^3 + 9x^2 - 4x - 5$.

Zgjidhje: Derivati i parë dhe i dytë i funksionit janë $f'(x) = -6x^2 + 18x - 4$ dhe $f''(x) = -12x + 18$.

Barazimi $f''(x) = 0$ d.m.th., $-12x + 18 = 0$, ka zgjidhje $x = \frac{3}{2}$. Edhe derivati i dytë është përkufizuar për çdo numër real.

Prandaj bashkësia e numrave realë është ndarël në dy interval $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ dhe $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

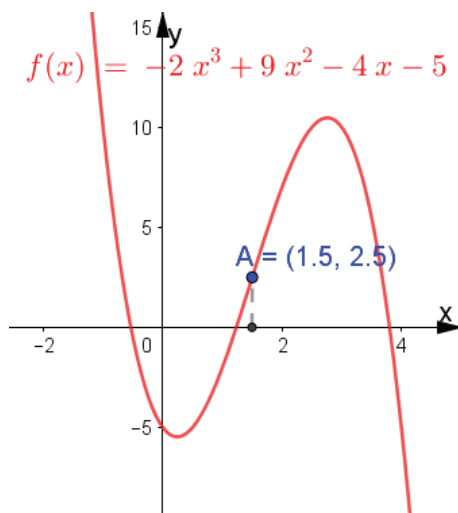
Për $x \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$, vlera e derivatit të dytë është $f''(x) > 0$. Vijon se funksioni $y = f(x)$ është konkav (i futur) në intervalin $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$.

Për $x \in \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$, vlera e derivatit të dytë është $f''(x) < 0$. Vijon se funksioni është konveks (i dalë) në intervalin $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

Pasim majtas dhe djathtas prej pikës me abshisë $x = \frac{3}{2}$ ka shenjë të ndryshme, vijon se pika $A\left(\frac{3}{2}, f\left(\frac{3}{2}\right)\right)$ është pikë e infleksionit të funksionit të dhënë.

Për $x = \frac{3}{2}$, kemi $f\left(\frac{3}{2}\right) = -2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 + 9 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{3}{2} - 5 = \frac{5}{2}$, d.m.th., pika $A\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ është pikë e infleksionit të funksionit.

Te figura është paraqitur grafiku i funksionit.



Detyra për ushtrime:

1. Të caktohen intervalet e konveksitetit dhe konkavitetit dhe pikat e infleksionit të funksionit $f(x) = x^2(1-x)$.
2. Të caktohen intervalet e konveksitetit dhe konkavitetit dhe pikat e infleksionit të funksionit $f(x) = x - 2 - \frac{6}{x-1}$.
3. Të caktohet parametri a , ashtu që lakorja $y = x^3 + ax^2 + 1$ ka pikë të infleksionit $P(1, y)$.
4. Të vërtetohet se funksioni $y = \frac{x+1}{x^2+1}$ ka tri pika të infleksionit të cilat shtrihen te drejtëza e njëjtë.

SHQYRTIMI I VIJIMIT DHE SKICIMI I GRAFIKUT TË FUNKSIONIT

Deri tani vërejtëm se si me ndihmën e derivatit të parë dhe të dytë të funksionit të dhënë shqyrtohen disa veti të tij, sikurse janë: monotonia, vlera ekstreme, lakimi dhe pikat e infleksionit. Me vlerën kufitare të funksionit shqyrtohen: asimptotat dhe vijueshmëria e funksionit. Me shqyrtimin edhe të vetive të tjera: çift, tek, periodiciteti, prerje me boshtet koordinative, fitohen mjaft pika prej funksionit që të mund ta skicojmë grafikun e tij.

Për ta skicuar grafikun e funksionit $f(x)$ i caktojmë:

- 1) Fusha e përkufizimit të funksionit;
- 2) Çift, tek, periodikiteti i funksionit;
- 3) Pikëprerjet e grafikut të funksionit me boshtet koordinative (zero dhe prerje me boshtin y);
- 4) Asimptotat e funksionit;
- 5) Vlerat ekstreme, natyra e tyre dhe intervalet e, omotonisë së funksionit;
- 6) Pikat e infleksionit për lakimin;
- 7) Skicimi i grafikut të funksionit.

Në bazë të të dhënave të fituara skicohet grafiku i funksionit. Është e preferueshme të gjitha të dhënat e fituara me shqyrtim analitik gradualisht të futen në sistemin koordinativ që të vërehet vijimi dhe të skicohet grafiku i funksionit.

Shembulli 1. Të shqyrtohet dhe të skicohet grafiku i funksionit $y = x^3 - 3x + 2$.

Zgjidhje: E shqyrtojmë vijimin e funksionit sipas mënyrës së dhënë.

- 1) Pasi funksioni është polinomial, fusha e përkufizimit të funksionit është bashkësia e numrave realë, d.m.th., $D_f = \mathbb{R}$.
- 2) Çift dhe tek. Fusha e përkufizimit është bashkësi simetrike. Prandaj caktojmë

$$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) + 2 = -x^3 + 3x + 2 = -(x^3 - 3x - 2).$$

Përfundojmë se funksioni nuk është as çift, as tek.

Nuk është funksion periodik. Periodikiteti është e pranishme më së shpeshti te funksionet trigonometrike, prandaj nuk do ta shqyrtojmë në çdo detyrë.

- 3) Pikëprerjet e grafikut të funksionit me boshtet koordinative.
Zerot e funksionit.

E barazojmë funksionin me zero, d.m.th., $x^3 - 3x + 2 = 0$. Me prove mund të caktojmë se $x = 1$ është rrënjë e barazimit $1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 0$. Pasi $x = 1$ është rrënjë e këtij barazimi, për t'i

caktuar rrënjët tjera do ta pjesëtojmë polinomin me $x - 1$ dhe do të fitojmë herës polinom për një shkallë më të vogël dhe mbetja 0, vijon

$$(x^3 - 3x + 2) : (x - 1) = x^2 + x - 2$$

$$\underline{-x^3 \mp x^2}$$

$$x^2 - 3x + 2$$

$$\underline{-x^2 \mp x}$$

$$-2x + 2$$

$$\underline{\mp 2x \pm 2}$$

$$0$$

Prej barazimit $x^2 + x - 2 = 0$, i gjejmë edhe zerot tjera. Me zgjidhjen e barazimit katror sipas formulës $x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 2}}{2}$, kemi $x_1 = \frac{-1 + 3}{2} = 1$ dhe $x_2 = \frac{-1 - 3}{2} = -2$

$x = 1$, është zero e dyfishtë d.m.th., funksioni e prek boshtin x dhe ajo është pika $A(1,0)$,

$x = -2$, është zero, d.m.th., funksioni kalon nëpër pikën $B(-2,0)$.

Pikëprerja me boshtin y .

Zëvendësojmë për $x = 0$ te funksioni dhe fitojmë $y = f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 + 2 = 2$. Pikëprerja e funksionit me boshtin y është pika $C(0, 2)$.

4) Asimptotat e funksionit

Asimptotë horizontale nuk ka, pasi

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} (x^3 - 3x + 2) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} x^3 \left(\frac{x^3}{x^3} - \frac{3x}{x^3} + \frac{2}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} x^3 \left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right) = \pm \infty$$

Asimptotë vertikale nuk ka, pasi fusha e përkufizimit të funksionit është $D_f = \mathbb{R}$ dhe nuk ka vlera kritike.

Asimptotë të pjerrët nuk ka

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^3 - 3x + 2}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^3 \left(\frac{x^3}{x^3} - \frac{3x}{x^3} + \frac{2}{x^3} \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right)}{1} = +\infty$$

Vërejtje: Funksioni polinomial nuk ka asimptota.

5) Vlerat ekstreme, natyre e tyre dhe intervalet e monotonisë.

Nëse derivati i funksionit $y' = f'(x) = 3x^2 - 3$. Nëse e barazojmë me 0, e fitojmë barazimin $3x^2 - 3 = 0$ d.m.th., $x^2 = 1$. Zgjidhjet e barazimit janë $x_1 = 1$ dhe $x_2 = -1$.

Nëse $x_1 = 1$, atëherë $y(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = -2 + 2 = 0$. Vijon se $E_1(1, 0)$.

Nëse $x_2 = -1$, atëherë $y(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 2 = -1 + 3 + 2 = 4$. Vijon se $E_2(-1, 4)$.

Pikat $E_1(1, 0)$ dhe $E_2(-1, 4)$ janë ekstremet e mundshme të funksionit.

Me njehsimin e shenjës së derivatit të parë të funksionit prej shenjës së çfarëdo vlere prej intervaleve $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ dhe $(1, +\infty)$ mund të caktojmë intervalet e monotonies dhe ekstremet.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
interval	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$	
$f'(x) = 3x^2 - 3$	$f'(-2) = 9 > 0$	$f'(0) = -3 < 0$	$f'(2) = 9 > 0$	
Monotonia	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	
Vlera e $f(x)$		4	0	
Pika		E_2	E_1	

Fitojmë se te $E_1(1, 0) \equiv A$ funksioni ka minimum, ndërsa në $E_2(-1, 4)$ funksioni ka maksimum.

Intervalet e monotonies janë:

$f(x)$ është monotono rritëse për $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$,

$f(x)$ është monotono zvogëlues për $x \in (-1, 1)$.

6) Pikat e infleksionit dhe intervalet e lakimit.

Për funksionin $y = x^3 - 3x + 2$, derivati i parë është $y' = 3x^2 - 3$, ndërsa derivati i dytë është $y'' = 6x$

Për t'i caktuar intervalet e lakimit derivatin e dytë e barazojmë me 0, $y'' = 0$. E fitojmë barazimin $6x = 0$, që ka zgjidhje $x = 0$.

Nëse $x = 0$, atëherë $y(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 + 2 = 2$, Vijon se $P(0, 2)$.

Pika $P(0, 2)$ është pikë e mundshme e infleksionit të funksionit.

Me njehsimin e shenjës së derivatit të dytë të funksionit prej shenjës së çfarëdo vlere prej intervaleve $(-\infty, 0)$ dhe $(0, +\infty)$ mund t'i caktojmë intervalet e lakimit.

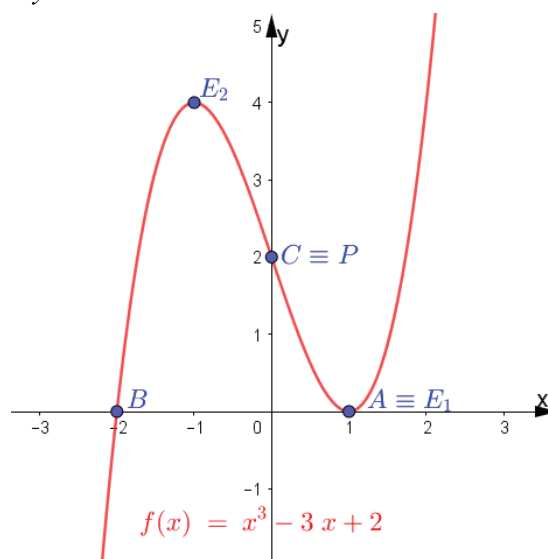
x	$-\infty$	0	$+\infty$
interval	$(-\infty, 0)$		$(0, +\infty)$
$f''(x) = 6x$	$f''(-1) = -6 < 0$		$f''(1) = 6 > 0$
Lakimi	$\cap$		$\cup$
Vlera e $f(x)$	2		
Pika	P		

Për $x \in (-\infty, 0)$, $f(x)$ është konvekse (e dalë),

Për $x \in (0, +\infty)$, $f(x)$ është konkave (e futur).

Në pikën $P(0, 2) \equiv C$, pasi ndryshon shenja e derivatit të dytë funksioni ka pikë të renfleksionit.

7) Grafiku i funksionit $y = x^3 - 3x + 2$ është



Vërejtje: Për të vizatuar më lehtë funksionet, pas mbarimit të shqyrtimit, është e preferueshme të skicohet grafiku edhe në geogebër. Në këtë mënyrë nxënësit në mënyrë të pavarur do ta kontrollojnë zgjidhjen e fituar.

Shembulli 2. Ta shqyrtojmë vijimin dh eta skicojmë grafikun e funksionit

Zgjidhje:

$$f(x) = 3x^5 - 6x^3$$

E vizatojmë grafikun e funksionit në Geogebër me shënimet e funksionit në

fushën për futje dhe i caktojmë vlerat përkatëse të funksionit me këto urdhëra:

Për ekstren të funksionit urdhëri: Ekstrem (f)

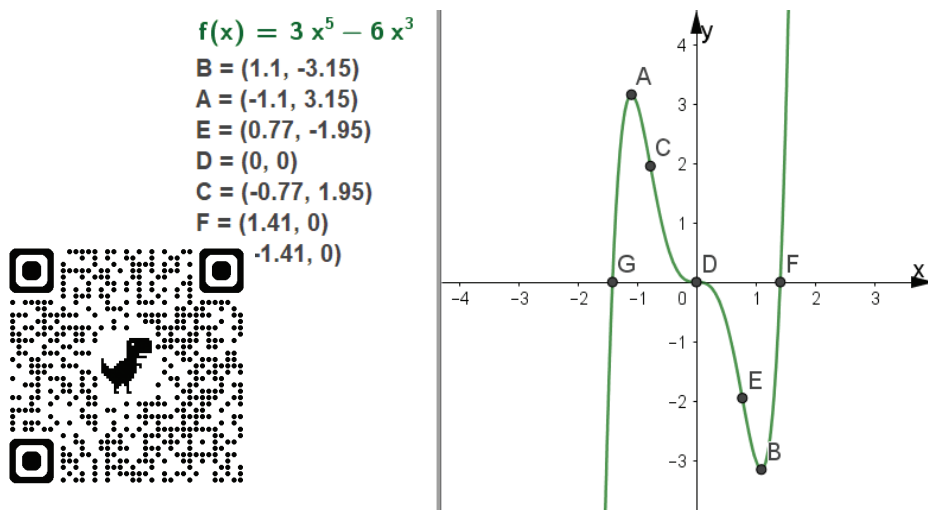
Për pikën e infleksionit të funksionit urdhërin: Pika e infleksionit (f)

Për pikëprerjet me boshtin y me urdhërin: Prerje ($f, x = 0$)

Për pikëprerjet me boshtin x me urdhërin: Prerje ($f, y = 0$)

Për asimptotat e funksionit urdhëri: Asimptota (f).

Te “Dritarja algebrike” në Geogebra janë shkruar koordinatat e të gjitha pikave të fituara.



<https://www.geogebra.org/m/d6p3wegy>

Shembulli 3. Të shqyrtohet dhe skicohet grafiku i funksionit $y = \frac{x^2}{x-1}$.

Zgjidhje: E shqyrtojmë vijimin e funksionit sipas skemës së dhënë.

1) Fusha e përkufizimit.

Pasi funksioni është racional thyesor për caktimin e fushës së përkufizimit duhet ta zgjidhim barazimin $x - 1 = 0$ d.m.th., $x = 1$ dhe zgjidhjet ta përjashtojmë prej bashkësisë së numrave realë. Vijon $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ d.m.th., $D_f = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

2) Çift dhe tek.

Fusha e përkufizimit D_f nuk është simetrike, nuk ka nevojë edhe të shqyrtohet $f(-x)$. Përfundojmë se funksioni nuk është as çift, as tek.

3) Pikëprerjet e grafikut të funksionit me boshtet koordinative.

Pikëprerja me boshtin x , fitohet nëse $f(x) = 0$ d.m.th., zgjidhet barazimi $\frac{x^2}{x-1} = 0$.

Thyesa do të jetë e barabartë me 0, nëse numëruesi është i barabartë me 0, d.m.th., $x^2 = 0$.

Zgjidhje e barazimit është $x = 0$.

Vijon, $A(0,0)$ është zero e dyfishtë.

Pikëprerja me boshtin y fitohet kur $x = 0$. Kemi $f(0) = \frac{0^2}{0-1} = 0$. Pika puthitet me pikëprerjen me boshtin x , d.m.th., ajo është pika $A(0,0)$.

4) Asimptotat e funksionit.

a) Asimptota vertikale e funksionit mund të ketë për $x = 1$, pasi fusha e përkufizimit është $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, d.m.th., vlera kritike është $x = 1$.

T'i caktojmë vlerën kufitare të majtë dhe të djathtë për $x = 1$.

Vlerën kufitare të majtë do ta caktojmë nëse fusim $x = 1 - h$ ku $h > 0$ dhe $h \rightarrow 0$

$$\text{d.m.th., } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1-h)^2}{1-h-1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1-2h+h^2}{-h} = -\infty$$

Vlerën kufitare të djathtë do ta caktojmë nëse fusim $x = 1 + h$ ku $h > 0$ dhe $h \rightarrow 0$

$$\text{d.m.th., } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2}{1+h-1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1+2h+h^2}{h} = +\infty$$

Fitojmë se asimptota vertikale është drejtëz $x = 1$, ku grafiku prej të djathtës afrohet prej anës së lartë të asimptotës, ndërsa prej të majtës prej anës së poshtme të asimptotës.

b) Asimptota horizontale

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x \left(\frac{x}{x} - \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{1 - \frac{1}{x}} = \pm\infty,$$

Funksioni nuk ka asimptotë horizontale.

c) Asimptotë e pjerrët është drejtëza $y = kx + n$.

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x \left(1 - \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = 1$$

Asimptota e pjerrët e funksionit është drejtëza $y = x + 1$.

Të caktojmë se si sillet grafiku i funksionit në lidhje me asimptotën e pjerrët.

E njehsojmë ndryshimin:

$$f(x) - y = \frac{x^2}{x-1} - (x+1) = \frac{x^2 - (x+1)(x-1)}{x-1} = \frac{x^2 - x^2 + 1}{x-1} = \frac{1}{x-1}$$

E caktojmë shenjën e tij në lidhje me argumentin x .

Pasi $\frac{1}{x-1} > 0$ për $x > 1$, vijon se lakorja është mbi asimptotën për $x > 1$, ndërsa pasi $\frac{1}{x-1} < 0$ për $x < 1$, vijon se lakorja është nën asimptotën kur $x < 1$.

5) Vlerat ekstreme, natyra e tyre dhe intervalet e monotonisë.

Nëse derivatin e funksionit $y' = \left(\frac{x^2}{x-1} \right)' = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$, e barazojmë me 0, e fitojmë barazimin $x^2 - 2x = 0$, d.m.th., $x(x-2) = 0$. Zgjidhjet e barazimit janë $x_1 = 0$ dhe $x_2 = 2$.

Nëse $x_1 = 0$, atëherë $y(0) = \frac{0^2}{0-1} = \frac{0}{-1} = 0$. Vijon $E_1(0, 0)$.

Nëse $x_2 = 2$, atëherë $y(2) = \frac{2^2}{2-1} = \frac{4}{1} = 4$. Vijon $E_2(2, 4)$.

Pikat $E_1(0, 0)$ dhe $E_2(2, 4)$ janë ekstremet e mundshme të funksionit.

Njehsohet shenja e derivatit të parë të funksionit prej shenjës që fitohet kur zëvendësojmë çfarëdo vlerë prej intervaleve $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$ dhe $(2, +\infty)$ te derivati i parë. Pasi derivati i parë nuk është përkufizuar te pika $x = 1$ pika për ndarje të intervaleve merret edhe pika 1. Prej tabelës do të caktojmë intervalet e monotonies dhe ekstremet.

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
interval	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 2)$	$(2, +\infty)$	
$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$	$f'(-1) = \frac{3}{4} > 0$	$f'\left(\frac{1}{2}\right) = -3 < 0$	$f'\left(\frac{3}{2}\right) = -3 < 0$	$f'(3) = \frac{3}{4} > 0$	
Monotonia	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	
Vlera e $f(x)$		0	/	4	
Pika		E_1	/	E_2	

Domethënë fitojmë se te $E_1(0, 0) \equiv A$ funksioni ka maksimum, ndërsa te $E_2(2, 4)$ funksioni ka minimum.

Intervalet e monotonies janë:

Për $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, $f(x)$ është monotono rritës,

Për $x \in (0, 1) \cup (1, 2)$, $f(x)$ është monotono zvogëlues.

6) Pikat e infleksionit dhe intervalet e lakimit.

Për funksionin $y = \frac{x^2}{x-1}$, derivati i parë është $y' = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$, ndërsa derivati i dytë është:

$$y'' = \left(\frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \right)' = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2 - 2x) \cdot 2 \cdot (x-1)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{(x-1)((2x-2)(x-1) - 2(x^2 - 2x))}{(x-1)^4} = \frac{2x^2 - 2x - 2x + 2 - 2x^2 + 4x}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^3}$$

Për t'i caktuar intervalet e lakimit derivatin e dytë e barazojmë me 0, $y'' = 0$. E kemi barazimin $0 = 2$, që nuk ka zgjidhje.

Funksioni nuk ka pikë të infleksionit.

Derivati i dytë nuk është përkufizuar për $x = 1$.

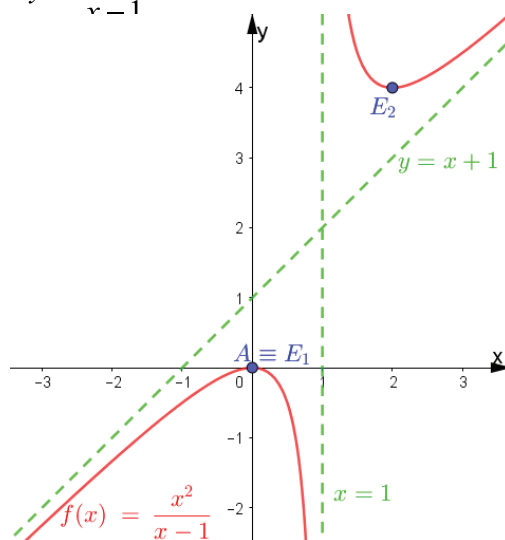
Njehsohet shenja e derivatit të dytë të funksionit në intervalet $(-\infty, 1)$ dhe $(1, +\infty)$ që të mund t'i caktojmë intervalet e lakimit.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
interval	$(-\infty, 1)$		$(1, +\infty)$
$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$	$f''(0) = -2 < 0$		$f''(2) = 2 > 0$
Lakim	$\cap$		$\cup$
Vlera e $f'(x)$		/	
Pika		/	

Për $x \in (-\infty, 1)$, $f(x)$ është konveks (e dalë),

Për $x \in (1, +\infty)$, $f(x)$ është konskav (e futur).

7) Grafiku i funksionit $y = \frac{x^2}{x-1}$ është:



Shembulli 4. Të shqyrtohet vijimi dhe të vizatohet grafiku i funksionit $y = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Zgjidhje: E shqyrtojmë vijimin e funksionit sipas skemës së dhënë.

1) Fusha e përkufizimit është $D_f = \mathbb{R}$.

2) Funksioni i çiftëzisë.

D_f është fushë simetrike.

$f(-x) = -x \cdot e^{-\frac{(-x)^2}{2}} = -x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = -f(x)$, vijon funksioni është tek. Grafiku i funksionit është simetrik në lidhje me fillimin e koordinatave.

3) Pikëprerjet e grafikut të funksionit me boshtet koordinative.

Pikëprerja me boshtin x , fitohet nëse $f(x) = 0$, d.m.th., zgjidhet barazimi $x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$.

Barazimi do të jetë i barabartë me 0, nëse $x = 0$.

Domethënë $A(0,0)$ është zero e funksionit.

Pikëprerja me boshtin y fitohet kur $x = 0$. Kemi $f(0) = -0 \cdot e^{-\frac{0^2}{2}} = -0 \cdot e^0 = 0$. Pika puthitet me pikëprerjen me boshtin x , d.m.th., ajo është pika $A(0,0)$.

4) Asimptotat e funksionit

a) Asimptota vertikale. Pasi fusha e përkufizimit të funksionit është gjithë bashkësia e numrave realë vijon se funksioni nuk ka asimptota vertikale.

b) Asimptota horizontale.

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{\frac{x^2}{2}}} = 0$$

Drejtëza $y = 0$ është asimptotë horizontale e funksionit.

Se si sillet grafiku i funksionit në lidhje me asimptotën horizontale?

E njehsojmë ndryshimin:

$$f(x) - y = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} - 1$$

E caktojmë shenjën e tij në lidhje me argumentin x .

Pasi $x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} - 1 > 0$ për $x > 0$, vijon lakorja është mbi asimptotën për $x > 0$, ndërsa pasi $x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} - 1 < 0$ për $x < 0$, vijon lakorja është nën asimptotën për $x < 0$.

c) Asimptota e pjerrët.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0, \text{ funksioni nuk ka asimptotë të pjerrët.}$$

5) Vlerat ekstreme, natyra e tyre dhe intervalet e monotonisë.

E njehsojmë derivatin e funksionit

$$y' = \left(x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \right)' = e^{-\frac{x^2}{2}} + x \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot 2x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = e^{-\frac{x^2}{2}} (1 - x^2).$$

Nëse e barazojmë me 0, e fitojmë barazimin $e^{-\frac{x^2}{2}} (1 - x^2) = 0$ d.m.th., $1 - x^2 = 0$. Zgjidhjet e barazimit janë $x_1 = 1$ dhe $x_2 = -1$.

Nëse $x_1 = 1$ atëherë $y = f(1) = 1 \cdot e^{-\frac{1^2}{2}} = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$. Vijon $E_2 \left(-1, -\frac{1}{\sqrt{e}} \right)$, ose nëse njehsojmë vlerat e përafërta kemi $E_2(-1, -0.61)$.

Nëse $x_2 = -1$ atëherë $y = f(-1) = (-1) \cdot e^{-\frac{(-1)^2}{2}} = (-1) \cdot e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{e}} = -\frac{1}{\sqrt{e}}$. Vijon $E_2 \left(-1, -\frac{1}{\sqrt{e}} \right)$, ose nëse njehsojmë vlerat e përafërta kemi $E_2(-1, -0.61)$.

Pikat $E_1(1, 0.61)$ dhe $E_2(-1, -0.61)$ janë ekstreme të mundshme të funksionit

Njehsohet shenja e derivatit të parë të funksionit prej shenjës që duhet të fitohet kur do të zëvendësojmë çfarëdo vlere prej intervaleve $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ dhe $(1, +\infty)$ te derivati i parë. Prej tabelës do t'i caktojmë intervalet e monotonies dhe ekstremet.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
interval	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$	
$f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} (1 - x^2)$	$f'(-2) = -\frac{3}{e^2} < 0$	$f'(0) = 1 > 0$	$f'(2) = -\frac{3}{e^2} < 0$	
Monotoni	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	
Vlera e $f(x)$		-0.61	0.61	
Pika		E_2	E_1	

Domethënë, kemi se te $E_1(1, 0.61)$ funksioni ka maksimum, port e $E_2(-1, -0.61)$ funksioni ka minimum.

Intervalet e monotonies janë:

Për $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $f(x)$ është monotono zvogëlues,

Për $x \in (-1, 1)$, $f(x)$ është monotono rritës.

6) Pika e infleksionit dhe intervalet e monotonisë.

Për funksionin $y = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$, derivati i parë është $y' = e^{-\frac{x^2}{2}}(1 - x^2)$, edhe derivati i dytë është:

$$y'' = \left(e^{-\frac{x^2}{2}}(1 - x^2) \right)' = -x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (1 - x^2) + e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (-2x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (-x + x^3 - 2x) = e^{-\frac{x^2}{2}}(x^3 - 3x)$$

Për t'i caktuar intervalet e lakimit, derivatin e dytë e barazojmë me 0, $y'' = 0$. E kemi barazimi $e^{-\frac{x^2}{2}}(x^3 - 3x) = 0$. Barazimi do të jetë i barabartë me 0, vetëm nëse $x^3 - 3x = 0$ d.m.th., $x(x^2 - 3) = 0$ që ka zgjidhje $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{3}$ dhe $x_3 = -\sqrt{3}$.

Nëse $x_1 = 0$, atëherë $f(0) = 0 \cdot e^{-\frac{0^2}{2}} = 0 \cdot 1 = 0$. Vijon $P_1(0, 0)$.

Nëse $x_2 = \sqrt{3}$, atëherë $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3} \cdot e^{-\frac{\sqrt{3}^2}{2}} = \sqrt{3} \cdot e^{-\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{e^3}} = \frac{\sqrt{3}}{e\sqrt{e}}$. Vijon $P_2\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{e\sqrt{e}}\right)$, ose të njehsuara vlerat e përafërta $P_2(1.73, 0.39)$.

Nëse $x_3 = -\sqrt{3}$, atëherë $f(-\sqrt{3}) = -\sqrt{3} \cdot e^{-\frac{\sqrt{3}^2}{2}} = -\sqrt{3} \cdot e^{-\frac{3}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{e^3}} = -\frac{\sqrt{3}}{e\sqrt{e}}$. Vijon $P_3\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{e\sqrt{e}}\right)$, ose të njehsuara vlerat e përafërta $P_3(-1.73, -0.39)$.

Pikat $P_1(0, 0)$, $P_2(1.73, 0.39)$ dhe $P_3(-1.73, -0.39)$ janë pika të mundshme të infleksionit të funksionit.

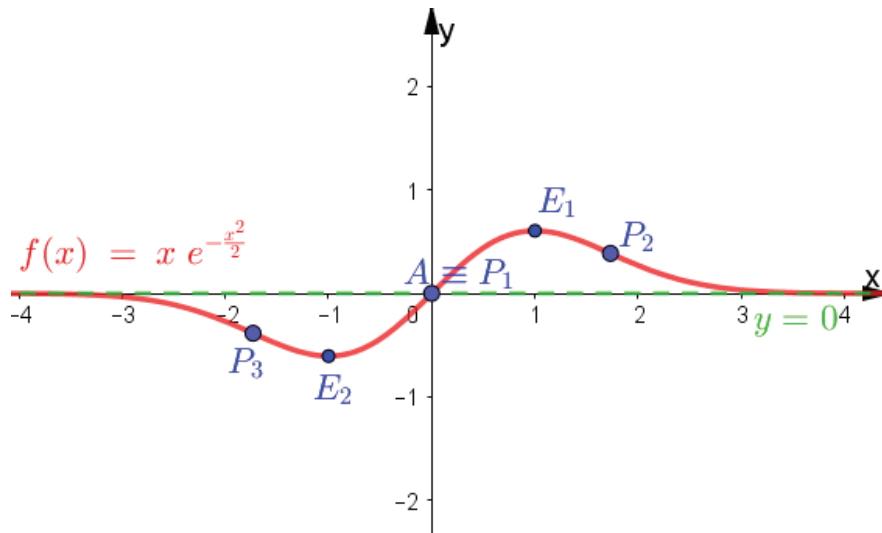
Me njehsimin e shenjës së derivatit të dytë të funksionit prej shenjës së çfarëdo vlere prej intervalit $(-\infty, -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, 0)$, $(0, \sqrt{3})$ dhe $(\sqrt{3}, +\infty)$ mund ta caktojmë lakimin e funksionit.

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$
interval	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, 0)$	$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, +\infty)$	
$f''(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}(x^3 - 3x)$	$f''(-2) < 0$	$f''(-1) > 0$	$f''(1) < 0$	$f''(2) > 0$	
Lakimi	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$	
Vlera e $f(x)$		-0.39	0	0.39	
Pika		P_3	P_1	P_2	

Për $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$, $f(x)$ është konvekse (e dalë),

Për $x \in (-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$, $f(x)$ është konkave (e futur).

7) Grafiku i funksionit $y = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ është:



Detyra për ushtrime:

1. Të shqyrtohet vijimi dhe skicimi i grafikut të funksionit:

a) $y = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ b) $y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ c) $y = \frac{x - 1}{x^2 - 4}$

2. Të shqyrtohet vijimi dhe skicimi i grafikut të funksionit:

a) $y = \frac{x^2 - 2x - 2}{x^2 - 2x}$ b) $y = -x^3 + 3x - 2$ c) $y = x^4 - 4x^3 + 3x^2$

3. Të shqyrtohet vijimi dhe skicimi i grafikut të funksionit:

a) $f(x) = \frac{x}{x - 2}$ b) $f(x) = \frac{1 - x^2}{x^2 + 1}$ c) $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x}$

4. Të shqyrtohet vijimi dhe skicimi i grafikut të funksionit:

a) $f(x) = \frac{x - 1}{x - 2}$ b) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3 - 4x}$ c) $f(x) = \frac{3x}{x^2 + 2}$

5. Të shqyrtohet vijimi dhe skicimi i grafikut të funksionit:

a) $f(x) = (1-x^2)e^{-x}$ b) $f(x) = x \cdot e^{-x}$ c) $f(x) = x^2 \cdot e^x$

Detyrat mund t'i paraqitni edhe te Geogebra (<https://www.geogebra.org/>) të kontrolloni zgjidhjen e fituar.

6. Prej grafikut të funksionit $f(x) = \frac{3-4x}{x^2-4x+3}$ të shkruhen përgjigjet e këtyre kërkesave:

- Fusha e përkufizimit të funksionit,
- Pikëprerja me boshtin x , nëse ekziston,
- Pikëprerja me boshtin y , nëse ekziston,
- Intervalet e rritjes dhe zvogëlimit,
- Intervalet e daljes dhe hyrjes,
- Ekstremet e funksionit, nëse ekzistojnë,
- Pilat e infleksionit, nëse ekzistojnë,
- cila është vlera e përafërt e funksionit për $x = 4$,
- Për cilën vlerë të x funksioni ka vlerë $y = 4$,
- Vallë funksioni është çift ose tek,
- Çfarë asimptota ka funksioni?

$$f(x) = \frac{3-4x}{x^2-4x+3}$$

$$I1 = \{y = 0, x = 1, x = 3\}$$

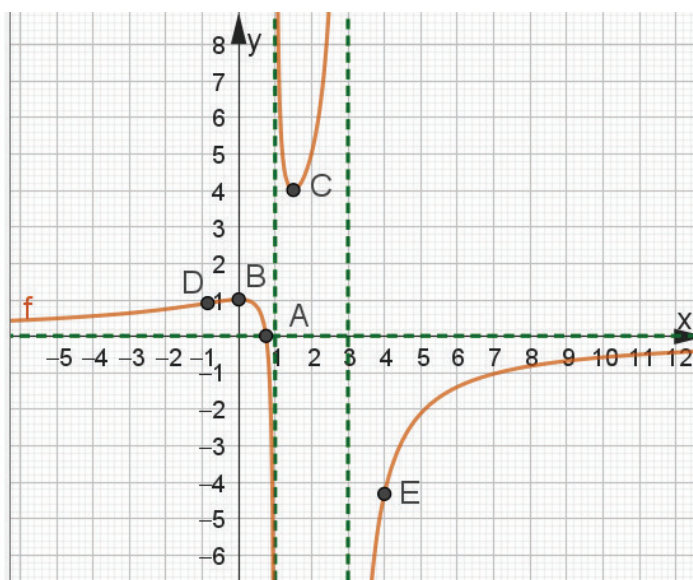
$$A = (0.75, 0)$$

$$B = (0, 1)$$

$$C = (1.5, 4)$$

$$D = (-0.85, 0.9)$$

$$E = (4, -4.33)$$



7. Prej grafikut të funksionit $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 3}$ të shkruhen përgjigjet të këtyre kërkesave:

- Fusha e përkufizimit të funksionit,
- Pikëprerja me boshtin x , nëse ekziston,
- Pikëprerja me boshtin y , nëse ekziston,
- Intervalet e rritejes dhe zvogëlimit,
- Intervalet e daljes dhe hyrjes,
- Ekstremit e funksionit, nëse ekzistojnë,
- Pikat e infleksionit, nëse ekzistojnë,
- cila është vlera e përafërt e funksionit për $x = 4$,
- Për cilën vlerë të x funksioni ka vlerë $y = 4$,
- Vallë funksioni është çift ose tek,
- Çfarë asimptota ka funksioni?

Vërejtje: $\sqrt{3} \approx 1.73$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 3}$$

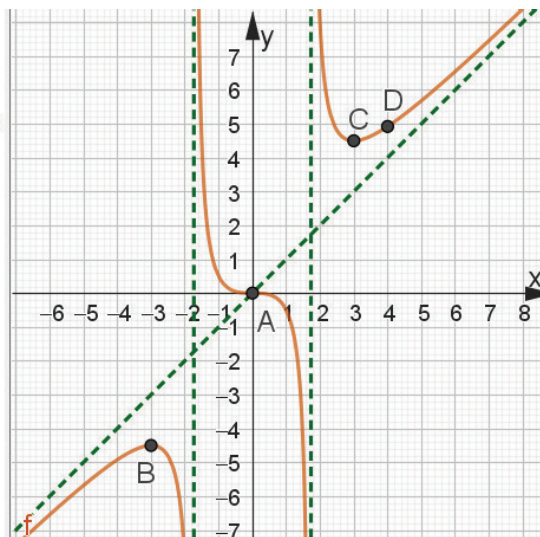
$$I1 = \{y = x, x = -1.73, x = 1.73\}$$

$$A = (0, 0)$$

$$C = (3, 4.5)$$

$$D = (4, 4.92)$$

$$B = (-3, -4.5)$$



9. ZBATIMI I DERIVATIT PËR ZGJIDHJEN E PROBLEMEVE PREJ EKSTREMEVE

Shembulli 1. Paraqite numrin 90 si shumë të dy numrave natyrorë, të atillë që prodhimi i njërit prej tyre me katrorin e tjetrit është maksimal.

Zgjidhje: Le të jetë x njëri numër, atëherë $90 - x$ është numri tjetër.

Sipas kushtit të detyrës, prodhimi i njërit prej tyre me katrorin e tjetrit mund ta shkruajmë me $P(x) = (90 - x) \cdot x^2$ ku $0 \leq x \leq 90$.

Fituam funksion prej ndryshores x që mund ta shkruajmë sikurse $P(x) = 90x^2 - x^3$.

Derivati i parë është $P'(x) = 180x - 3x^2$ dhe nëse e barazojmë me 0, e kemi barazimin $180x - 3x^2 = 0$.

Vijon $3x(60 - x) = 0$ d.m.th., $3x = 0$ dhe $60 - x = 0$.

Zgjidhjet e barazimit janë $x_1 = 0$ dhe $x_2 = 60$, të cilat janë pikat stacionare për funksionin $P(x)$.

Derivati i dytë është $P''(x) = 180 - 6x$.

Për $x_1 = 0$, $P''(0) = 180 - 6 \cdot 0 = 180 > 0$. Vijon prodhimi është minimal.

Për $x_1 = 60$, $P''(60) = 180 - 6 \cdot 60 = 180 - 360 = -180 < 0$. Vijon prodhimi është maksimal dhe është $P(60) = (90 - 60) \cdot 60^2 = 108000$.

Numrat janë 60 dhe 30.

Shembulli 2. Numri 40 të paraqitet si prodhim të dy shumëzuesve ashtu që shuma e katrorëve të tyre të jetë më i vogël.

Zgjidhje: Nëse njëri prej mbledhësve e shënojmë me x , atëherë mbledhësi tjetër është $40 - x$. Shuma e katrorëve të tyre do të jetë $S(x) = x^2 + (40 - x)^2$.

Derivati i parë është $S'(x) = 2x + 2(40 - x)(-1) = 4x - 80$ të cilin e barazojmë me 0. E fitojmë barazimin $4x - 80 = 0$. Vijon $x = 20$ d.m.th., është pikë stacionare për funksionin $S(x)$.

Derivati i dytë është $S''(x) = 4$.

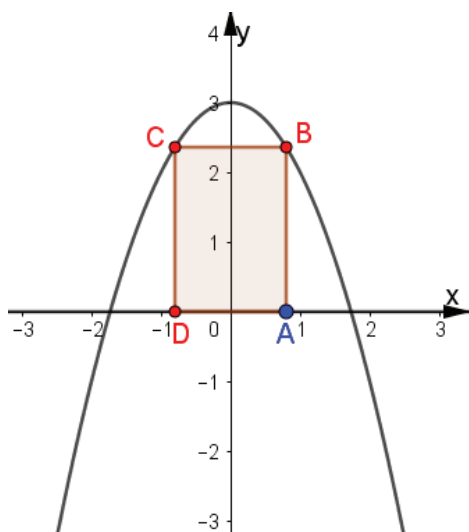
Për $x = 20$, $S''(20) = 4 > 0$. Vijon se për $x = 20$ shuma $S(20) = 20^2 + (40 - 20)^2 = 800$ është maksimal.

Numrat janë 20 dhe 20

Shembulli 3. Shtëpia e vjetër do të rinovohet. Te njëri prej mureve që ka qemer me hark të paraqitur te figura duhet të hapet me formë drejtkëndore që do të ketë madhësi maksimale. Të konstatohen dimensionet e derës nëse lartësia më e madhe e qemerit është 3 m . Është konstatuar se tehu i qemerit është pjesë prej grafikut të funksionit $y = 3 - x^2$.



Zgjidhje: Është bërë aplet në geogebër. Funksioni është futur në sistem me koordinata ashtu që baza e dhomës është boshti x , ndërsa kulmi i parabolës gjendet te boshti y .



Pika A le t'i ketë koordinatat $(a, 0)$ dhe B ka koordinata $(0, b)$.

Atëherë përkatësisht $C(-a, b)$ dhe $D(-a, 0)$.

Drejtkëndëshi i kërkuar ka dimensione me brinjët $2a$ dhe b .

Syprina e drejtkëndëshit është,

$$S = 2a \cdot b.$$

Pasi pika B duhet t'i takon parabolës $y = 3 - x^2$, atëherë vlen barazimi $b = 3 - a^2$.

Me zëvendësim kemi funksionin për syprinën, $S(a) = 2a \cdot (3 - a^2)$ d.m.th.,

$$S(a) = 6a - 2a^3$$

<https://www.geogebra.org/m/uwkhpst>

Derivati i parë i funksionit është $S'(a) = 6 - 6a^2$.

Me barazimin me 0, kemi $6 - 6a^2$. Zgjidhja është $a = 1$ dhe $a = -1$. Që paraqesin zgjidhje simetrike. Prandaj do ta caktojmë zgjidhjen vetëm për pikën stacionare $a = 1$.

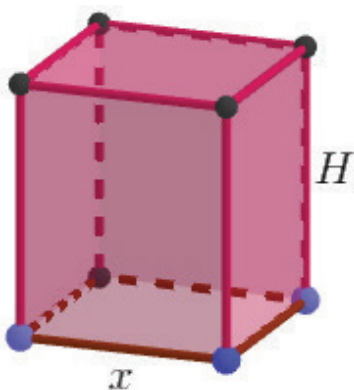
Derivati i dytë është $S''(a) = -12a$.

Për pikën stacionare $a = 1$, kemi $S''(1) = -12 \cdot 1 = -12 < 0$, d.m.th., funksioni ka vlerë maksimale.

Vijon, për $a = 1$, $b = 3 \cdot 1^2 = 2$ ka syprinë maksimale të derës $S = 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4m^2$. Dera do të jetë e gjerë $2m$ dhe e lartë $2m$.

Shembulli 4. Një firmë për procesin e saj të prodhimit ka nevojë për ujë, pra duhet të bënë rezervuar me fundin në formë të katrorit dhe me vëllim $32m^3$, ashtu që mbulesa me pllaka të mureve dhe të fundit janë shpenzuar më shumë material.

Zgjidhje: Rezervuari fundin le ta ketë me formë katrori me brinjë x dhe lartësi H . Syprina e sipërfaqes që duhet të mbulohet është $S = x^2 + 4xH$, ku syprina e bazës është x^2 dhe syprina e një murit anësor është xH .



Vëllimi i rezervuarit me bazë katror është $V = x^2 H$.

Prej kushtit të detyrës $V = 32m^3$, pra kemi $x^2 H = 32$ dhe

$$H = \frac{32}{x^2}.$$

Duke zëvendësuar H te shprehja për syprinën kemi

$$S(x) = x^2 + 4x \cdot \frac{32}{x^2} = x^2 + \frac{128}{x}$$

që është funksion me ndryshore x për të cilën duhet ta caktojmë ekstremin

Derivati i parë është $S'(x) = \left(x^2 + \frac{128}{x} \right)' = 2x - \frac{128}{x^2}$ të cilin e barazojmë me 0.

Vijon, $2x - \frac{128}{x^2} = 0$ d.m.th., $2x^3 - 128 = 0$. Prej $x^3 = 64$ e kemi zgjidhjen $x = 4$, është pikë stacionare.

Derivati i dytë i funksionit $S''(x) = \left(2x - \frac{128}{x^2} \right)' = 2 + \frac{256}{x^3}$. Me zëvendësimin $x = 4$ te derivati i dytë kemi

$$S''(x) = 2 + \frac{256}{4^3} = 6 > 0. \text{ Vijon se funksioni } S(x) = x^2 + \frac{128}{x} \text{ për } x = 4, \text{ e kemi vlerën}$$

$$S(4) = 4^2 + \frac{128}{4} = 48m^2 \text{ që është vlera minimale.}$$

Dimensionet e kërkuara të rezervuarit për të pasur syprinë minimale nëse ka bazë katror janë: brinja $4m$ dhe lartësia $H = \frac{32}{x^2} = \frac{32}{4^2} = 2m$.

Shembulli 5. Një avio kompani ka bërë kampanjë për çmimin e biletës për avio linjën e re. Bileta e avionit kushton 200 euro nëse avioni ka prej 0 deri 50 udhëtarë. Për çdo udhëtar diplomatik çmimi i biletës zvogëlohet për 2 euro. (Nëse për linjën për shembull kanë blerë biletë 53 udhëtarë, atëherë çmimi i çdo bilete do të jetë nga 194 euro). Me sa numër të biletave të shitura do të realizohen të ardhurat maksimale?

Zgjidhje: Me x le ta shënojmë avio biletat e shitura më e madhe se 50.

Atëherë shumën që do ta përfiton kompania që ka shitur $x + 50$ pasi do ta njehsojmë me: $S = (50 + x)(200 - 2x)$, ku $200 - 2x$ është çmimi i biletës.

Me rregullimin e barazimit kemi,

$$S(x) = (50 + x)(200 - 2x) = 10000 + 100x - 2x^2.$$

Derivati i parë i funksionit është $S'(x) = 100 - 4x$. Nëse derivatin e parë e barazojmë me 0, kemi $100 - 4x = 0$ d.m.th., $x = 25$ është pikë stacionare.

Derivati i dytë është $S''(x) = -4$ dhe për $x = 25$ derivati është $S''(25) = -4 < 0$, që vijon se funksioni do të ketë maksimum. Të ardhurat maksimale do të jenë,

$$\text{Për } x = 25, \text{ vijon } S(25) = 10000 + 100 \cdot 25 - 2 \cdot 25^2 = 11250 \text{ euro.}$$

Vijon, numri i biletave të shitura duhet të jetë $50 + x = 50 + 25 = 75$, ndërsa avio kompania ka përfitim maksimal.

Shembulli 6. Kontejneri në formë të cilindrit me bazë rrethore është e nevojshme të ketë (të ketë vëllim prej) 64 m^3 . Gjeji dimensionet e kontejnerit ashtu që sasia e teneqes së përdorur (sipërfaqja) është minimale, nëse kontejneri është i hapur prej anës së sipërme.

Zgjidhje: Le të jenë x dhe H rrezet e bazës dhe lartësisë së kontejnerit. Le të jetë S syprina e llamarinës së përdorur dhe V është vëllimi i kontejnerit.

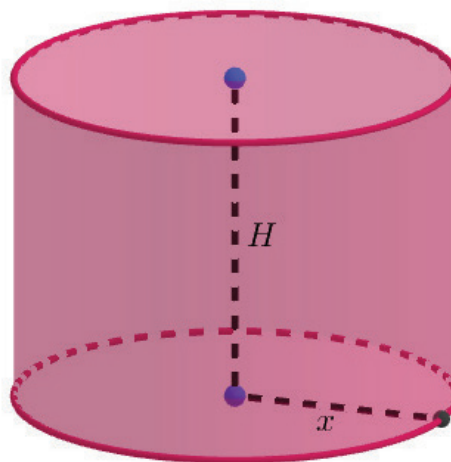
Prej kushtit të detyrës $V = 64 \text{ m}^3$ dhe formula për vëllimin e cilindrit është $V = r^2 \pi H$.

Me zëvendësim kemi $x^2 \pi H = 64$.

Formula për syprinën e cilindrit kemi

$$S = r^2 \pi + 2\pi r H$$

(cilindri është i hapur prej anës së sipërme, prandaj kemi syprinë vetëm të një baze rrethore).



Nëse zëvendësojmë $H = \frac{64}{x^2\pi}$ dhe rrezën me x te formula për syprinën e kemi formulën

$$S(x) = x^2\pi + 2\pi x \frac{64}{x^2\pi} = x^2\pi + \frac{128}{x}.$$

Derivati i funksionit është $S'(x) = 2x\pi - \frac{128}{x^2}$.

Prej barazimit $S'(x) = 0$, d.m.th., $2x\pi - \frac{128}{x^2} = 0$ e kemi pikën stacionare $x = 34\pi$.

Derivati i dytë është $S''(x) = 2\pi + \frac{256}{x^3}$.

Për $x = \frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$ kemi $P''\left(\frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}\right) = 2\pi + 4\pi = 6\pi > 0$, d.m.th., funksioni ka maksimum.

Rrezja e bazës është $x = \frac{4}{\sqrt[3]{\pi}} \approx 2.73m$, lartësia është $H = \frac{64}{\left(\frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}\right)^2} = \frac{4}{\sqrt[3]{\pi}} \approx 2.73m$ dhe syprina maksimale është $S = 48\sqrt[3]{\pi} m^2 = 70.3m^2$

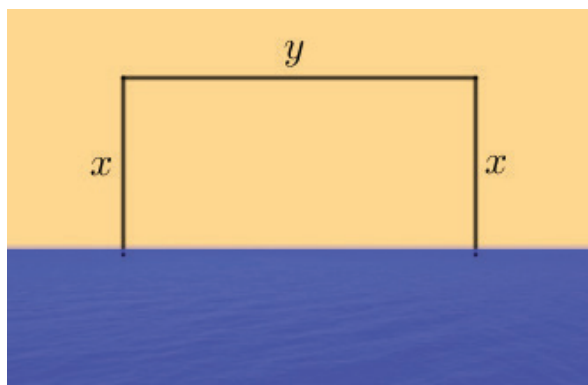
Shembulli 7. Fermer me $2400m$ tel të rrethon fushë, në formë të drejtkëndëshit, që gjendet për rreth lumit, ku nuk ka nevojë të shfrytëzohet tel për së gjati lumit. Si duhet të jenë dimensionet e drejtkëndëshit për pjesën e rrethuar të kaetë sipërfaqe maksimale?

Zgjidhje: Le të jenë x dhe y dimensionet e fushës. Pasi nuk duhet të shfrytëzohet tel për së gjati lumit, atëherë prej kushtit të detyrës për perimetrin e mbështjellësit kemi $2x + y = 2400$, d.m.th., $y = 2400 - 2x$.

Syprina e fushës është

$P = xy = x(2400 - 2x)$, d.m.th., e kemi funksionin

$$P(x) = 2400x - 2x^2.$$



Derivati i parë i funksionit është $S'(x) = 2400 - 4x$.

Nëse derivatin e parë e barazojmë me 0, kemi barazimin $2400 - 4x = 0$, që ka zgjidhje $x = 600$, që është pikë stacionare.

Derivati i dytë i funksionit është $S''(x) = -4$ dhe pika stacionare $S''(600) = -4 < 0$. Vijon për $x = 600$ funksioni ka vlerë maksimale.

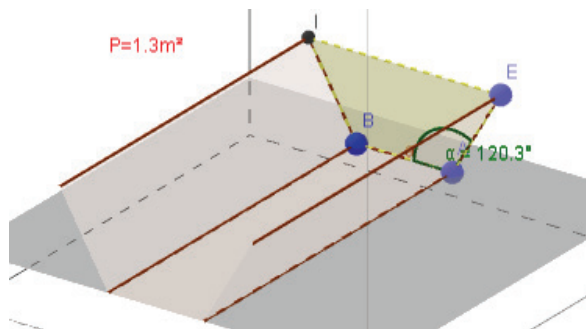
Brinjët e kopshtit duhet të jenë $600m$ dhe $1200m$. Syprina maksimale e arës është $720000m^2$.

Shembuj praktik plotësues me zbatimin e derivatit për zgjidhjen e problemeve prej ekstremit. Të dedikuar për nxënësit të cilët dëshirojnë më shumë të hulumtojnë.

Shembulli 8. Duhet të bëhet kanal i hapur për ujë me lidhje të tre blloqeve të betonit me gjerësi $1m$. Prerja tërthore e kanalit është trapez barakrahas me bazën e vogël të barabartë me krahun. Nën cilin kënd në lidhje me bazën duhet të vendosen blloqet anësore për të bërë lugun me prerje më të madhe (fuqi më të madhe të lëshimit të ujit)

Zgjidhje: Së pari pak të hulumtojmë. Kërkoni fotografi prej kanalit përçues në internet. Se si duket kanali? A keni shikuar kanal deri më tani?

Tani mund të shfrytëzohet edhe apleti në Geogebra për përpunimin e kanalit.

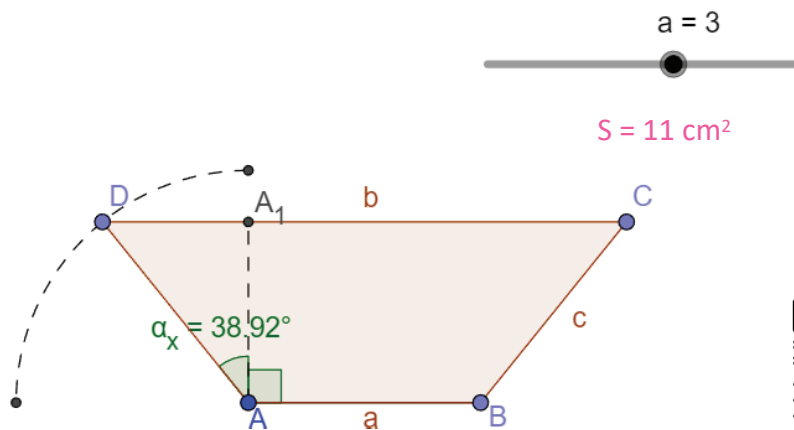


Aplet: <https://www.geogebra.org/m/k4DNecD7>



Ta lëvizim pikën E dhe të shikohet fuqia përçuese e kanalit.

Kanali do të ketë fuqi përçuese më të madhe nëse prerja tërthore ka syprinë më të madhe. Prerja tërthore e kanalit është trapez barakrahas. Duhet të caktojmë nën cilin kënd duhet të vendosen muret anësore të kanalit që syprina e trapezit barakrahas të jetë maksimale.



Aplet: <https://www.geogebra.org/m/ESFG4SFj>



Do të shfrytëzojmë një aplet për prerjen tërthore të kanalit. Me lëvizjen e pikës D mund të caktojmë në cilën pozitë duhet të vendosen muret anësore për të pasur syprinë maksimale. Vërejmë se syprina e trapezit ndryshon!

Tani mund të bëjmë skicë të prerjes tërthore.

Prerja tërthore është trapez barakrahas, me krah të barabartë me bazën e vogël.

Me bazën $a = \overline{AB} = 1m$ dhe krah $c = \overline{BC} = \overline{AD} = 1m$.

Mundemi ta shënojmë bazën tjetër me $b = \overline{CD}$ dhe lartësinë $h = \overline{AA_1}$.

Syprina e trapezit njehsohet me formulën $S = \frac{a+b}{2}h$.

Këndi i murit anësor e ndërton me bazën do ta shënojmë me $x + 90^\circ$,
ku $0^\circ \leq x < 90^\circ$.

Prej trekëndëshit kënddrejtë $\triangle AA_1D$ mund të caktojmë h . Prej formulës trigonometrike $\cos x = \frac{h}{c}$ vijon

$$h = c \cdot \cos x = 1 \cdot \cos x = \cos x \text{ d.m.th., } h = \cos x$$

Bazën b , do ta caktojmë nëpërmjet barazimit $m = \overline{DA_1}$ të trapezit

$$b = a + 2m \text{ dhe } \sin x = \frac{m}{c}.$$

Vijon $m = c \cdot \sin x = 1 \cdot \sin x = \sin x$ d.m.th., $b = 1 + 2 \sin x$.

Me zëvendësimin te formula për syprinë kemi $S = \frac{1+1+2 \sin x}{2} \cdot \cos x$.

Mund të zëvendësojmë S me $f(x)$ dhe kemi funksionin me ndryshore x ,

$$f(x) = \frac{2(1+\sin x)}{2} \cdot \cos x = (1+\sin x) \cdot \cos x = \cos x + \sin x \cdot \cos x \text{ d.m.th.,}$$

$$f(x) = \cos x + \sin x \cdot \cos x$$

Për të caktuar ekstremin, derivatin e parë e barazojmë me 0 dhe do ta zgjidhim barazimin

$$f'(x) = (\cos x + \sin x \cdot \cos x)' = (\cos x)' + (\sin x)' \cdot \cos x + \sin x \cdot (\cos x)'$$

$$f'(x) = -\sin x + \cos^2 x - \sin^2 x$$

Prej $f'(x) = 0$, e kemi barazimin $-\sin x + \cos^2 x - \sin^2 x = 0$.

Nëse shfrytëzohet identitetet themelor trigonometrik $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ dhe zëvendësojmë $\sin x = t$, fitojmë barazim katror

$$-\sin x + 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 0$$

$$-2\sin^2 x - \sin x + 1 = 0 \quad /(-1), \text{ d.m.th., } 2t^2 + t - 1 = 0$$

Zgjidhjet e barazimit katror i caktojmë me mënyrën për zgjidhjen e barazimit katror

$$t_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \text{ dhe ato janë } t_1 = \frac{1}{2} \text{ dhe } t_2 = -1.$$

Nëse kthehet te zëvendësimi për të caktuar vlerën e x , kemi

$$\text{Për } t_1 = \frac{1}{2}, \text{ vijon se } \sin x = \frac{1}{2} \text{ d.m.th., } x = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$$

$$\text{Për } t_2 = -1, \text{ vijon se } \sin x = -1 \text{ d.m.th., } x = \frac{3\pi}{2} = 270^\circ$$

Ta caktojmë derivatin e dytë të funksionit

$$f''(x) = (-\sin x + \cos^2 x - \sin^2 x)' = -\cos x + 2\cos x(-\sin x) - 2\sin x \cos x \text{ d.m.th.,}$$

$$f''(x) = -4\sin x \cos x - \cos x$$

$$\text{Për } x = \frac{\pi}{6} = 30^\circ, \text{ vijon se } f''(30^\circ) = -4\sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ - \cos 30^\circ \text{ d.m.th.,}$$

$$f''(30^\circ) = -\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} < 0$$

Vijon funksioni ka vlerë maksimale për $x = 30^\circ$

Vlera $x = \frac{3\pi}{2} = 270^\circ$ nuk i takon intervalit, nuk ka nevojë të njehsohet vlera e derivatit të dytë.

Me zëvendësim të kushteve fillestare kemi $b = 1 + 2 \cdot \sin 30^\circ = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 + 1 = 2$ dhe

$$h = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

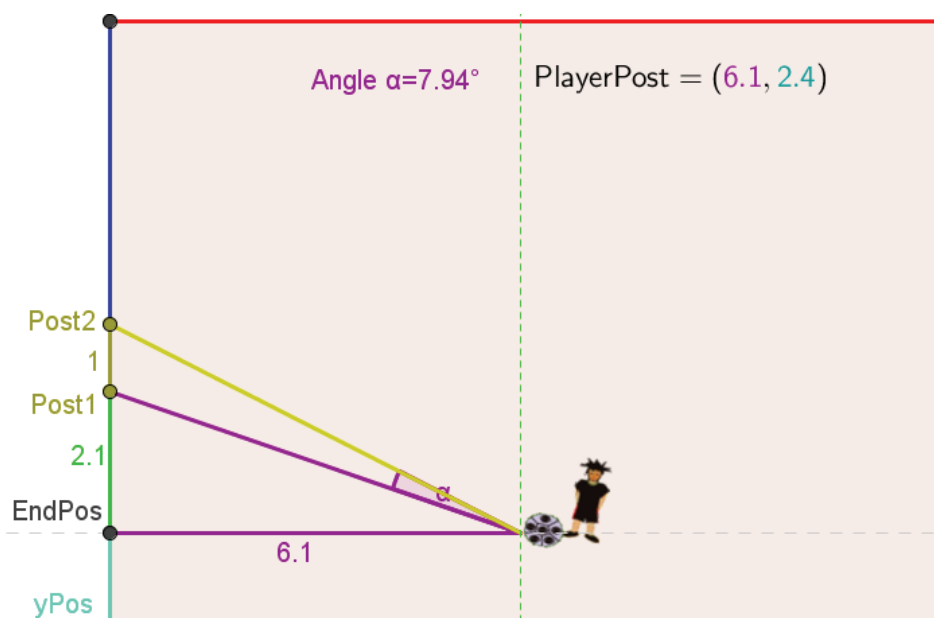
Për syprinën maksimale të trapezit kemi

$$S = \frac{1+2}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \text{ d.m.th., } S = 1,299 \approx 1,3m^2$$

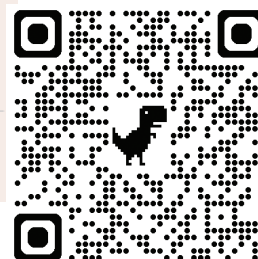
Shembulli 9. Futbollisti vrapon në fushë sipas vijave të drejta me aut-vijën. Prej ku duhet futbollisti ta drejton goditjen kah goli, ashtu që këndi për arritjen e golit të jetë maksimal?

Vërejtje: Vija paralele sipas të cilës vrapon futbollisti nuk duhet të kalojë nëpër gol. Pse? Cili është këndi në këtë rast, prej ku duhet ta drejton goditjen futbollisti që këndi të jetë maksimal?

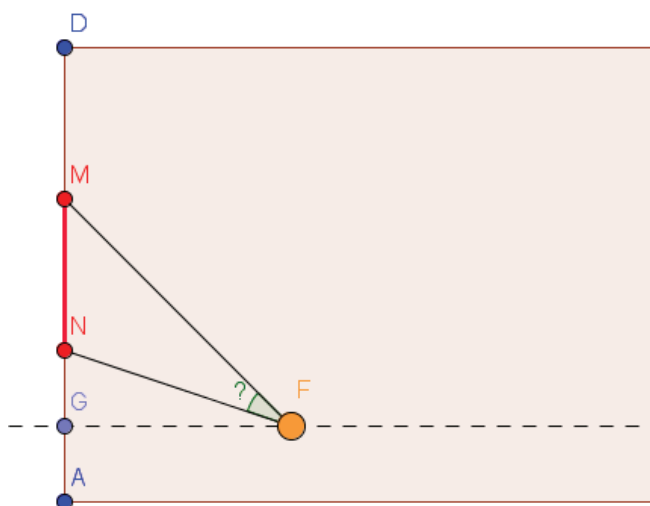
Zgjidhje: Në fillim mund të shfrytëzohet aplet dhe të vërejmë se si ndryshon këndi me lëvizje të futbollistit.



<https://www.geogebra.org/m/M7YfNB8r>



Të bëjmë skicë të detyrës



Fusha e futbollit e ka formën e drejtkëndëshit, ndërsa goli mund ta paraqesim me pikat.

Këndi: shtylla e parë, futbollisti, shtylla e dytë.

Shënoje këndin me α .

Shënime:

$\alpha = \angle NFM$

N – shtylla e parë

M – shtylla e dytë

F – futbollisti.

Pika lëvizëse është pika F me të cilën është paraqitur futbollisti.

Ai lëviz sipas drejtëzës paralele me aut vijën.

Vija paralele sipas të cilës lëviz futbollisti nuk duhet të kalojë nëpër këndin.

T'i shqyrtojmë trekëndëshat kënddrejtë $\triangle NGF$ dhe $\triangle MGF$

Shënime: $\overline{MN} = g$ gjerësia e këndit

$\overline{GN} = s$ largësia prej shtyllës së parë deri te prerja e drejtëzës paralele me aut vijën (sipas të cilës lëviz futbollisti) dhe gol vijës.

$\overline{FG} = b$ largësia e futbollistit deri te gol vija.

Prej formulave trigonometrike $\operatorname{tg}(\angle GFN) = \frac{s}{b}$ dhe $\operatorname{tg}(\angle GFM) = \frac{g+s}{b}$, vijon

$$\angle GFN = \operatorname{arctg} \frac{s}{b} \text{ dhe } \angle GFM = \operatorname{arctg} \frac{g+s}{b}.$$

Ta shprehim këndin $\alpha = \angle GFM - \angle GFN$, prej ku vijon se

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{g+s}{b} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{s}{b} \right).$$

Nëse zëvendësojmë $x = b$ dhe $\alpha = f(x)$, atëherë e kemi funksionin

$$f(x) = \operatorname{arctg} \left(\frac{g+s}{x} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{s}{x} \right).$$

Derivati i funksionit është

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{g+s}{x} \right)^2} \cdot \frac{-(g+s)}{x^2} - \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{x} \right)^2} \cdot \frac{-s}{x^2} = \frac{-(g+s)}{x^2 + (g+s)^2} + \frac{s}{x^2 + s^2}$$

Nëse $f'(x) = 0$, atëherë e kemi barazimin $\frac{-(g+s)}{x^2 + (g+s)^2} + \frac{s}{x^2 + s^2} = 0$.

Me rregullimi dhe zgjidhjen kemi,

$$x^2 g + s^2 (g+s) = s(g+s)^2$$

$$x^2 g = s(g+s)^2 - s^2 (g+s)$$

$$x^2 g = s(g+s)((g+s)-s)$$

$$x^2 g = s(g+s)g$$

$$x^2 = s(g+s) \text{ d.m.th., } x = \sqrt{s(g+s)} \text{ është pikë stacionare.}$$

Derivati i dytë është $f''(x) = \frac{2x(g+s)}{(x^2 + (g+s)^2)^2} + \frac{-2sx}{(x^2 + s^2)^2}$.

Nëse $x = \sqrt{s(g+s)}$, atëherë vlera e derivatit të dytë të funksionit në x është

$$f''(\sqrt{s(g+s)}) = 2\sqrt{s(g+s)} \left(\frac{-g}{s(g+s)(g+2s)^2} \right) < 0$$

Pasi vetëm $-g < 0$, herësi është negative, d.m.th., funksioni ka vlerë më të madhe.

Kemi për $x = \sqrt{s(g+s)}$ vlera maksimale e këndit është:

$$\alpha = \arctg\left(\frac{g+s}{\sqrt{s(g+s)}}\right) - \arctg\left(\frac{s}{\sqrt{s(g+s)}}\right).$$

Çka fitojmë për zgjidhje?

Nëse zëvendësohen vlerat konkrete prej fushës për futboll të vogël ku $g = 3m$, ndërsa le të jetë $s = 6m$, atëherë

$$x = \sqrt{6(3+6)} = \sqrt{6 \cdot 9} \text{ d.m.th., } x = 3\sqrt{6} \approx 7,35m \text{ dhe}$$

$$f(3\sqrt{6}) = \arctg\left(\frac{9}{3\sqrt{6}}\right) - \arctg\left(\frac{6}{3\sqrt{6}}\right) = 50,77^\circ - 39,23^\circ = 11,54^\circ$$

Futbollisti duhet të dërgoj goditjen kur është në largësi $7,35m$ prej gol vijës dhe këndi maksimal do të jetë $11,54^\circ$.

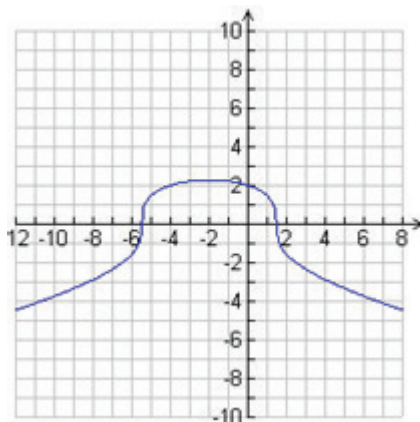
Detyra për ushtrime:

1. Numrin 42 ndaje në dy pjesë (mbledhës) ashtu që prodhimi i tyre të jetë më i madh.
2. Numrin 27 ndaje në dy pjesë (mbledhës) ashtu që shuma e tyre të jetë më e vogël.
3. Numrin 18 ndaje në dy pjesë (mbledhës) ashtu që shuma e kubeve të tyre të jetë më i vogël.
4. Prej të gjithë drejtkëndëshave me perimetër $26cm$, cakto atë që ka syprinë më të madhe.
5. Prej të gjithë drejtkëndëshave me perimetër $22 cm$, cakto atë që ka diagonal më të vogël.
6. Nxënësit e vitit të katërt për nevojat e panairit për arsim në shkollën e tyre duhet të vendosen 32 banga te fusha e sportit në formë të drejtkëndëshit. Si të vendosen bangat për të pasur syprinë më të madhe?
Nëse një bangë e ka gjatësinë prej $1,5m$ atëherë cakto nga sa të gjata do të jenë brinjët e formës drejtkëndore pas vendosjes së bangave.
7. Prej të gjithë trekëndëshave kënddrejtë me hipotenuzë $10cm$ cakto atë me syprinë më të madhe.
8. Te trekëndëshi me bazë $8cm$ dhe lartësi përkatëse $3cm$, brendashkruaj drejtkëndësh tek i cii njëra brinjë do të shtrihet te baza e dhënë e trekëndëshit me syprinë më të madhe.
9. Duhet të bëhet kuti cilindrike prej teneqeje me syprinë $54\pi cm^2$. Njehso rrezën dhe lartësinë e kutisë me formë cilindrike e cila duhet të jetë kuti rrethore e drejtë dhe të ketë vëllim më të madh.
10. Te koni me rreze $4cm$ dhe lartësi $6cm$ brendashkruaj cylinder me vëllim më të madh.
11. Rreth topi me rreze $20cm$ duhet të bëhet (jashtashkruhet) kon me vëllim më të vogël.

12. Prej kartoni që e ka formën e drejtkëndëshit me dimensione 48cm dhe 30cm të bëhet kuti me vëllim më të madh.. (Prej të gjithë 4 këndeve të kartonit duhet të prehet nga një katror dhe me mbështjellje të kartonit do të fitohet kuti pa mbulesë)
13. Në cilën pikë të elipsës $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ prej kuadrantit të parë, duhet të tërhiqet tangjentë e cila me boshtet koordinative do të formon trekëndësh me syprinë më të vogël.
14. Në pjesën të kufizuar me $y = 4 - x^2$ dhe $y = 0$ të brendashkruhet drejtkëndësh me brinjë paralele me boshtet koordinative syprina e të cilit është më e madhe.

DETYRA PËR PËRSËRITJE DHE ZBATIM PRAKTIK:

1. Të njehsohet derivati i funksionit: $f(x) = 4x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x - 2$.
2. Të njehsohet derivati i funksionit: $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+3}}$.
3. Të njehsohet derivati i funksionit: $f(x) = \ln\left(\frac{3x-2}{x+1}\right)$.
4. Të njehsohet derivati i funksionit: $f(x) = e^{3x} \sin(x^2 + 1)$.
5. Të caktohet barazimi i tangjentës së grafikut të funksionit $y = 4x - x^2$ në pikën $x = 2$.
6. Të caktohet barazimi i normales së grafikut të funksionit $f(x) = x^3 - 2x + 1$ në pikën $x = -1$.
7. Të caktohet shpejtësia e pikës materiale që kryen lëvizje drejtvizore sipas shenjës së rrugës $s(t) = t^3 - 2t^2 + 4t$ në kohën $t = 2$.
8. Të caktohet nxitimi i pikës materiale që kryen lëvizje drejtvizore sipas shenjës së rrugës $s(t) = 3t^3 + t^2 - 5$ në kohën $t = 1$.
9. Të shkruhet barazimi i tangjentës dhe normales së funksionit $f(x) = \sqrt[3]{8 - 4x - x^2}$ në pikën me abshisë $x_0 = -4$. Drejtëzat e fituara të vizatohen te grafiku.



10. Të caktohen intervallet e monotonies së funksionit $f(x) = \frac{1}{x^3}$.
11. Të caktohen ekstremet lokale të funksionit $f(x) = 2x^3 - 6x^2$.

12. Të caktohen intervalet e futjes/daljes dhe pikat e infleksionit të funksionit $f(x) = x^3 - 3x^2$.
13. Të shqyrtohet vijimi dhe të skicohet grafiku i funksionit $f(x) = \sqrt[3]{x}$.
14. Të shqyrtohet vijimi dhe të skicohet grafiku i funksionit $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$.
15. Numrin 60 ndaje në dy pjesë (mbledhës) ashtu që prodhimi i tyre të jetë më i madh.
16. Numrin 80 ndaje në dy pjesë (mbledhës) ashtu që shuma e kubeve të tyre të jetë më i vogël.
17. Numrin 100 ndaje në dy pjesë (mbledhës) ashtu që shuma e kubeve tyre të jetë më i madh.
18. Prej të gjithë drejtkëndëshave me perimetër 44cm , cakto atë që ka syprinë më të madhe.
19. Te koni me rreze r dhe lartësi H brendashkruaj cilindër me vëllim më të madh.
20. Rreth topi me rreze R duhet të bëhet (jashtashkruhet) kon me vëllim më të vogël.
21. Në cilën pikë të elipsës $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ prej kuadrantit të parë, duhet të tërhiqet tangjentë e cila me boshtet koordinative do të formon trekëndësh me syprinë më të vogël.

SHTESË: TESTE

TESTI NR: 1

NJËSIA MODULARE 1: VARGJET DHE PROGRESIONET

Vetëm njëri prej përgjigjeve të ofruara është i saktë. Zgjidhe dhe rrethoje përgjigjen e saktë. Çdonjëra prej detyrave vlerësohet me 3 pikë

1. Cili prej këtyre vargjeve është monotono zvogëlues?

a) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$ b) $\frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{7}{9}, \dots$ c) $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \dots$ ç) $\frac{3}{4}, \frac{6}{7}, \frac{9}{10}, \frac{12}{13}, \dots$

2. Te progresioni gjeometrik herësi $q = \frac{1}{2}$, anëtari i katërt është $a_4 = 3$, atëherë anëtari i parë a_1 është:

a) 8 b) $\frac{3}{8}$ c) 24 ç) 17

3. Shuma e rendit gjeometrik të pafundshëm $1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \dots$ është:

a) 9 b) 3 c) $\frac{3}{2}$ ç) $\frac{3}{4}$

4. Nëse $a_1 = 2$ dhe $a_{30} = 60$ janë anëtar të një progresioni aritmetik, atëherë $a_5 + a_{26}$ është:

a) 62 b) 60 c) 31 ç) 32

Njihso dhe plotëso që të jetë i saktë gjykimi. Çdonjëra prej detyrave vlerësohet me 6 pikë

5. Vargu i dhënë $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \dots$ është _____. Anëtari i parë është _____ dhe shuma e 5 anëtarëve të parë është _____

6. Pesë anëtarët e parë të vargut me anëtarin e përgjithshëm $a_n = (-1)^n \cdot 2^{n-1}$ janë: _____.

b) Numrat $\sin^2 30^\circ$, $\sin^2 45^\circ$ dhe $\sin^2 60^\circ$ formojnë progresion_____ pasi _____.

a) Duhet të futen _____ anëtar;

b) Vargu është _____;

Zgjidhi detyrat

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) = \underline{\hspace{1cm}}; \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{n^2 + 2}} = \underline{\hspace{1cm}}. \quad \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 2n^2 - 1}{7 - 4n + 3n^3} = \underline{\hspace{1cm}} \quad (12)$$

10. Te progresioni aritmetik $a_3 + a_6 = 20$ dhe $a_9 - a_2 = 14$. Gjeje progresionin.

(12)

11. Sa anëtar të progresionit gjeometrik $1, 3, 9, 27, \dots$ duhet të mbledhen, për të fituar shumën 3280. (12)

12. Gjeje vlerën kufitare $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n-1} \right)^{3n+1}$ (14)

13. Njehso vlerën e shprehjes $\sqrt[3]{4\sqrt{4}\sqrt[3]{4}\sqrt{4}\dots}$ (14)

0-30 Pamjaftueshëm (1)	31-48 Mjaftueshëm (2)	49-66 Mire (3)	67-84 Shumë mire (4)	85-100 Shkëlqyeshëm (5)
---------------------------	--------------------------	-------------------	-------------------------	----------------------------

TESTI NR: 2

NJËSIA MODULARE 2: FUNKSIONET ELEMENTARE

Vetëm njëri prej përgjigjeve të ofruara është i saktë. Zgjidhe dhe rrethoje përgjigjen e saktë. Çdonjëra prej detyrave vlerësohet me 6 pikë

1. Fusha e përkufizimit zë funksionite $f(x) = \log(x+3) - \log(4-x)$ është:

- a) $D_f = (-\infty, -3) \cup (4, +\infty)$ b) $D_f = (-3, 4)$ c) $D_f = (-3, +\infty)$ ç) tjetër vlerë

2. Vlera e funksionit $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 9}$ për $x = -1$ është:

- a) $\frac{5}{8}$ b) $-\frac{1}{8}$ c) $\frac{3}{8}$ ç) tjetër vlerë

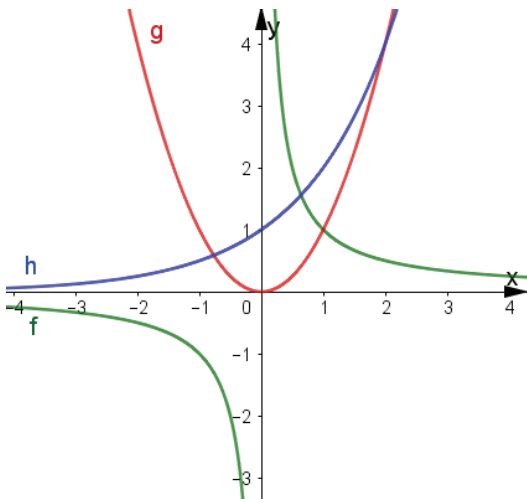
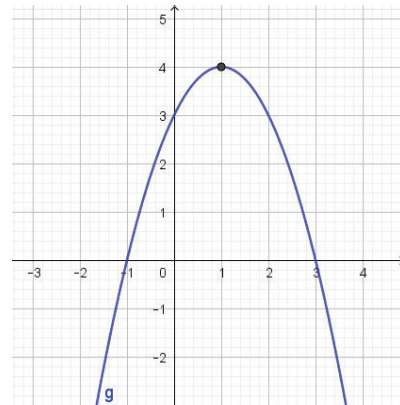
3. Zerot e funksionit $f(x) = -x^2 + 3x - 2$ janë:

- a) 1 dhe -2 b) 1 dhe 2 c) -1 dhe 2 ç) tjera vlera

Njehso dhe plotëso që të jetë i saktë gjykimi. Çdonjëra prej detyrave vlerësohet me 10 pikë

4. Për funksionin katror $f(x) = ax^2 + bx + c$ të caktohen:

- a) koordinatat e kulmit _____
b) shenja e parametrit a është _____,
c) intervalet e monotonies janë:
ç) pikëprerjet me boshtet koordinative janë:



5. Cilat prej shprehjeve algebrike i përgjigjet funksioneve f , g dhe h .

- a) 2^x b) $\frac{1}{x^2}$
c) x^3 ç) x^2
d) $\ln x$ dh) $\frac{1}{x}$

Zgjidhi detyrat

6. Shqyrto monotoninë e funksionit, në fushën e përkufizimit $f(x) = 2 - x^3$.

(12)

7. Cakto funksionin $f(x) = ax^2 + bx + 3$, $f(1) = 4$ dhe $f(-2) = -5$. Çka paraqet grafiku.

(12)

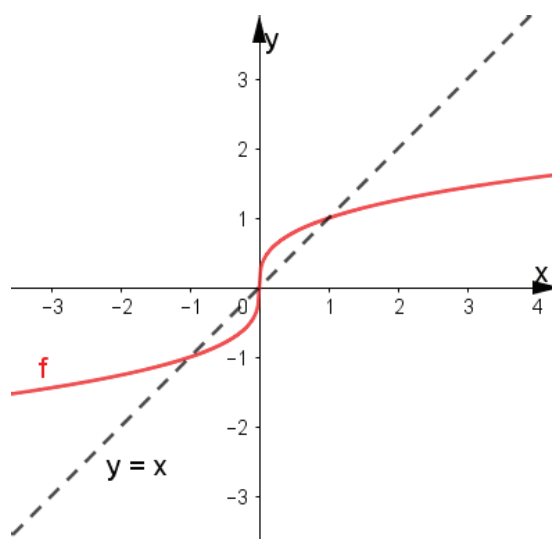
8. Cakto funksion invers të funksionit $f(x) = \frac{3x}{x-1}$.

(12)

9. Skico funksionin invers të funksionit të dhënë $f(x)$.

Shkruaj koordinatat e pikave të cilat ngelin në vend gjatë inversionit.

(12)



10. Për funksionin $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 3}{x - 4}$ të caktohet:

(14)

a) fusha e përkufizimit

b) zerot e funksionit

c) çiftëzimi i funksionit

ç) monotonia e funksionit në intervalin prej $(4, +\infty)$

Propozimi i kriterëve për vlerësim:

0-30 Pamjaftueshëm (1)	31-48 Mjaftueshëm (2)	49-66 Mire (3)	67-84 Shumë mire (4)	85-100 Shkëlqyeshëm (5)
---------------------------	--------------------------	-------------------	-------------------------	----------------------------

TESTI NR: 3

NJËSIA MODULARE 3: VLERA KUFITARE E FUNKSIONIT

Vetëm njëri prej përgjigjeve të ofruara është i saktë. Zgjidhe dhe rrethoje përgjigjen e saktë. Çdonjëra prej detyrave vlerësohet me 6 pikë

1. Vlera kufitare $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{3x - 9} =$ është:

- a) 1 b) 2 c) -3 ç) tjetër vlerë

2. Për funksionin $f(x) = \frac{3x}{x-1}$ drejtëza $x = 1$ është:

- a) asimptotë horizontale, b) asimptotë vertikale, c) asimptotë e pjerrët, ç) tjetër

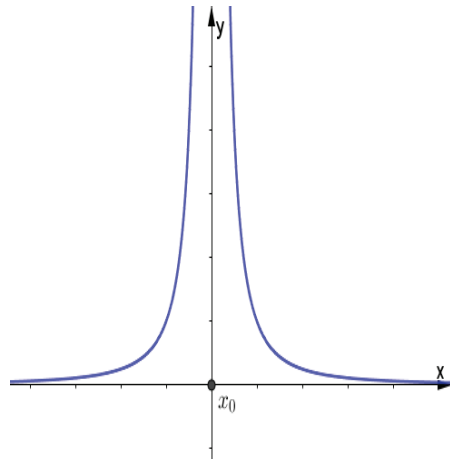
3. Është dhënë grafiku i funksionit. Të caktohen vlerat kufitare përkatëse të fusha që është shënuar.

a) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$

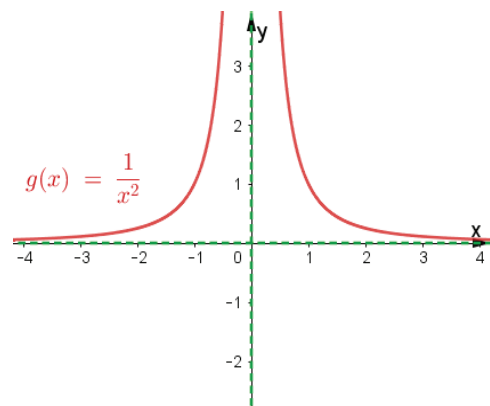
- ç) tjetër vlerë



Njihso dhe plotëso që të jetë i saktë gjykimi. Çdonjëra prej detyrave vlerësohet me 10 pikë

4. Njihso vlerën kufitare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{6}}{x}$

5. Shkruaj asimptotat të cilat i ka funksionit i dhënë me grafikun



6. Njehso vlerën kufitare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{\sin nx}$

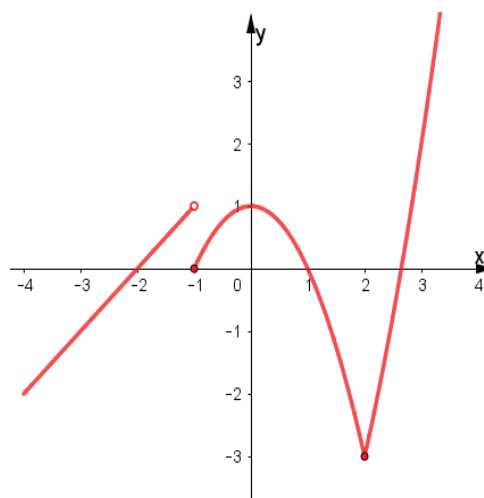
Zgjidhi detyrat

7. Njehso $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{x+3}$ (12)

8. Gjeji asimptotat e lakores $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x+1}$ (12)

9. Gjeji pikat e vijimit të

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x < -1 \\ 1-x^2, & -1 \leq x < 2 \\ x^2-7, & x \geq 2 \end{cases}$$



(14)

10. Për cilën vlerë të parametrave a dhe b funksioni

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^3, & x \leq 0 \\ ax+b, & 0 < x < 1 \\ \sqrt{x}, & x \geq 1 \end{cases}$$
 është i vijueshëm? (14)

Propozimi i kritereve për vlerësim:

0-30 Pamjaftueshëm (1)	31-48 Mjaftueshëm (2)	49-66 Mire (3)	67-84 Shumë mire (4)	85-100 Shkëlqyeshëm (5)
---------------------------	--------------------------	-------------------	-------------------------	----------------------------

TESTI NR: 4

NJËSIA MODULARE 4: DERIVATI I FUNKSIONIT

Detyrat janë me dy nivele të peshës A dhe B. Për çdonjërin prej detyrave zgjidh njërin prej varianteve të ofruara ose nën A ose nën B. Vetëm njëri poenizohet.

1. Gjeje derivatin e funksionit:

a) $y = \frac{1}{5}x^5 + 3x^3 - 2\operatorname{ctgx}$

(8)

b) $y = \sqrt[3]{x^2} - 3^x - 4\operatorname{tg}x$

(10)

2. Gjeje derivatin e funksionit:

a) $y = 4x^5 \ln x$

(8)

b) $y = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$

(10)

3.

a) Për funksionin $f(x) = (1-x)e^x$, gjeje derivatin e dytë dhe njehso $f''(-1)$ dhe $f''(0)$.

(8)

b) Gjeji intervalet e monotonisë së funksionit $f(x) = 7 + 3x^2 - x^3$

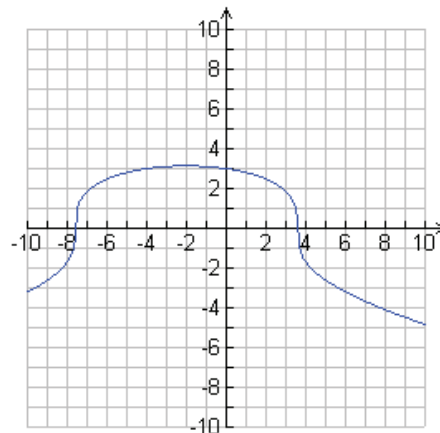
(15)

4.

a) Shkruaj barazimin e tangjentës së lakores $y = 2x^2 - x - 7$, në pikën $M(-2, y_0)$.

(8)

b) Të shkruhet barazimi i tangjentës dhe normales së funksionit $f(x) = \sqrt[3]{27 - 4x - x^2}$ në pikën me abshisë $x_0 = -4$. Drejtëzat e fituara të vizatohen te grafiku.



(15)

5. Gjeje derivatin e funksionit të përbërë

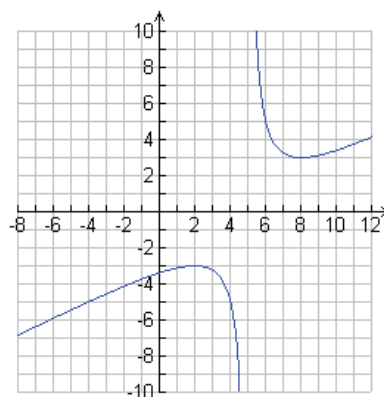
a) $y = \ln(3x^2 - x)$ (10)

b) $y = \ln(1 + \sqrt{1 + 2x}) - \sqrt{2x + 1}$ (15)

6.

a) Me diferencim logaritmik të gjendet derivati i funksionit $y = \left(\frac{x+5}{x-2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$. (10)

b) Të gjenden ekstremet lokale të funksionit $f(x) = \frac{34 - 10x + x^2}{2x - 10}$ dhe sipas grafikut (pa gjetur derivatin e dytë) të caktohet karakteri i tyre. Ekstremet lokale të barten te grafiku.



(15)

7. Shqyrto vijimin dhe skicimin e grafikut të funksionit:

a) $y = x^3 + x^2 - 2$ (15)

b) $y = \frac{x^2 - 1}{4 - x^2}$ (20)

Propozimi i kritereve për vlerësim:

0-30 Pamjaftueshëm (1)	31-48 Mjaftueshëm (2)	49-66 Mire (3)	67-84 Shumë mire (4)	85-100 Shkëlqyeshëm (5)
---------------------------	--------------------------	-------------------	-------------------------	----------------------------

ZGJIDHJA E DETYRAVE

Njësia modulare 1 – VARGJE DHE PROGRESIONE

1. PËRKUFIZIMI DHE VETITË E VARGJEVE PREJ NUMRAVE REALË

1. a) $1, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{8}{17}, \frac{5}{13}$ b) $-1, 1, -1, 1, -1$ c) $2, 4, 8, 16, 32$ ç) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}$; 4. a) $a_n = n^2$ b) $a_n = 2^n - 1$ c) $a_n = (-1)^{n+1}$ ç) $a_n = \frac{2}{2^{n-1}}$.

5. $a_n - a_{n+1} = \frac{2}{2^{n+1}} > 0$ – monotonisht zvogëlohet $|a_n| < 1$ i kufizuar; 6. monotonisht rritet dhe i kufizuar; 7. monotonisht zvogëlohet, për $n > 2$ dhe i kufizuar; 8. Monotonisht zvogëlohet dhe i kufizuar; 9. a) monotonisht zvogëlohet, b) monotonisht rritet, c) nuk rritet as nuk zvogëlohet, ç) monotonisht zvogëlohet, d) nuk rritet as nuk zvogëlohet; 10. a) i kufizuar, b) nuk është i kufizuar, c) nuk është i kufizuar, ç) i kufizuar, d) i kufizuar.

2. PROGRESIONI ARITMETIK

1.; 2.; 3.; 5. pas 9 vjet, $n = 9$; 6. 3, 8, 13; 7. Në 10 muaj; 8. 12, 20, 28, 36, 44, 52, 60, 68, 76, 84, 92, 100.

9. 14, 8, 2, -6, ...; 10. a) -14, -12, -10, -8, -6, ... b) 7, 10, 13, 16, 19, ...; 11. a) $a_8 = 25$ b) $a_9 = -\frac{3}{2}$ c) $a_{12} = 46$ ç) $a_{15} = 15a + b$

3. SHUMA E N TË PARË TË PROGRESIONIT ARITMETIK

1. $a_{25} = 101$ dhe $S_{25} = 1325$; 2. 8, 5, 2, -1, -4, ...; 3. $n = 9$; 4. $x = 39$; 5. $S_{100} = 3000$; 6. Person ii parë ka marrë 1750 denarë, ndërsa i fundit 6250 denarë; 8. $a_n = 10 + 10(n-1) = 10n$;

9. 4 ose 9 anëtar; 10. 21 anëtar; 11. $-\frac{16}{7}, \frac{16}{7}, \frac{48}{7}, \frac{80}{7}, \dots$

4. PROGRESIONI GJEOMETRIK

1. $a_{10} = \frac{1}{64}$; 2. $a_{20} = 3^{19}$; 3. $a_1 = \frac{1}{64}$; 4. $a_1 = 6, q = 3$; $a_1 = -6, q = -3$; 5. $2, -4, 8, -16, 32, \dots$; 6. $b = \pm 15$

7. $a_1 = 3, q = 2$ dhe progresioni gjeometrik është: 3, 6, 12, 24, 48, ...; 8. $8, -4, 2, -1, \frac{1}{2}, \dots$; 9. $a_1 = 5, q = 2$; $a_1 = -15, q = -2$

10. $a_1 = 1, q = 5$; $a_1 = 1, q = -5$; 11. $\frac{13}{3}, \frac{26}{3}, \frac{52}{3}, \frac{104}{3}, \frac{208}{3}, \dots$

5. SHUMA E N -ANËTARËVE TË PARË TË PROGRESIONIT GJEOMETRIK

1. $a_1 = 7$; 2. $S_{10} = 14762$; 3. $S_8 = 1530$; 4. $S_{15} = -65534$; 5. a) 6561 euro, b) 3487 euro; 6. $q = 2, n = 6$; 7. $n = 6, a_6 = -486$

8. a) $a_1 = \frac{3}{8}, S_5 = \frac{55}{216}$ b) $n = 6, S_6 = -\frac{481}{15552}$; 9. $a_1 = 1, q = 3, n = 4$; 10. $\frac{1}{2}, 1, 2$; 11. 139

6. VLERA KUFITARE E VARGUT

1. $n > 124$; 2. $n > 10$; 3. $n > 100$; 4. $n > 29$; 5. $n > 5$; 7. $n > 16$; 8. $n > 149$; 9. $n > 39$; 10. $n > 5$; 11. a) $0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \frac{7}{6}, \dots$ c) jo, ç) po, dh) $n > 1000$.

7. OPERACIONET ME VARGJE KONVERGJENTE

1. 2; 2. $-\frac{1}{2}$; 3. 1; 4. $\frac{1}{3}$; 5. 0; 6. 0; 7. $+\infty$; 8. $\frac{1}{3}$; 9. 5; 10. $+\infty$; 11. 0; 12. $\frac{1}{3}$; 13. 0; 14. e; 15. e^{-3} ; 16. 1; 17. -2; 18. e;

8. SHUMA E ANËTARËVE TË PROGRESIONIT GJEOMETRIK TË PAFUNDSHËM

1. $\frac{3}{4}$; 2. $\frac{20}{3}$; 3. $\frac{92}{3}$. Shfrytëzo shumën e dy progresioneve gjeometrike të pafundshme; 4. $\frac{2}{5}$; 5. 5; 6. a) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$, b) 12; 7. $\sqrt{5}$; 8. $3\sqrt[3]{147}$

9. $\frac{322}{99}$; 10. $\frac{1307}{300}$; 11. $\frac{3391}{990}$

DETYRA PËR PËRSËRITJE DHE ZBATIM PRAKTIK.

1. Monotonisht rritet dhe i kufizuar; 2. Monotonisht zvogëlohet për $n \geq 2$ dhe i kufizuar; 3. 6, 10, 14, 18, 22; 4. 10 anëtar; 5. $a_1 = 3, q = 2$;

6. Me model B. Do të paguan 420 denarë; 7. Me modelin e parë 2720 euro, ndërsa me modelin e dytë 2536,48 euro; 8. Model ii dytë. Përfitim me modelin e parë 10500 denarë, ndërsa me modelin e dytë 16383 denarë; 9. I pari 9500 denarë, ndërsa i fundit 500 denarë; 10. 120, 480 dhe 15360 baktere; 11. 62; 12. 168. Shfrytëzo shumë të progresionit gjeometrik. Një kur topi shkon poshtë, ndërsa tjetri kur topi shkon lartë; 13. 35 dollar; 14. 1120000 ekzemplarë; 15. 1126 kafshë të egra; 16. 33 tjegulla; 17. 78 lego bloqe.

18. Brinjët janë 4, 6, 9. Udhëzim: Shfrytëzo formulë të shkurtuar $1 + q^2 + q^4 = (1 + q^2 + q)(1 + q^2 - q)$.

19. a) 5, b) 0; 20. $\frac{124}{999}$;

Njësia modulare 2 – FUNKSIONET ELEMENTARE

1. KONCEPTI PËR FUNKSIONIN

1.1. FUSHA E PËRKUFIZIMIT TË FUNKSIONIT

Detyra 1. a) $D_f = R$ b) $D_f = R \setminus \{-1, 4\}$ c) $D_f = (-\infty, 4)$ d) $D_f = R \setminus \{2\}$ dh) $D_f = \left(-\infty, \frac{5}{3}\right]$ dh) $D_f = R$;

1.2. ZEROT E FUNKSIONIT

Detyra 2. a) $N_f = \{-2, 2\}$ b) $N_f = \{-1, 0, 1\}$ c) $N_f = \emptyset$ d) $N_f = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ dh) $N_f = \{0, 1, 2\}$.

1.3. FUNKSIONI I ÇIFTËZIMIT

Detyra 3. a) çift, b) tek, c) as çift, as tek, d) çift, dh) tek.

1.4. KUFIZIMI I FUNKSIONIT

Detyra 4. a) $0 < \frac{1}{1+x^2} < 1$ i kufizuar b) $0 < \frac{x^2}{1+x^2} < 1$ i kufizuar.

1.5. MONOTONIA E FUNKSIONIT

Detyra 5. a) monotonisht rritet, b) monotonisht zvogëlohet, c) monotonisht rritet në fushën e përkufizimit, d) monotonisht rritet, dh) monotonisht zvogëlohet në fushën e përkufizimit.

DETYRA PËR USHTRIME:

1. a) $D_f = R$ b) $D_f = R$ c) $D_f = R \setminus \{-3, 3\}$; 2. a) $D_f = \left(-\infty, \frac{2}{3}\right]$ b) $D_f = R$; 3. a) $D_g = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ b) $D_f = (1, 5]$
 4. a) $D_f = R \setminus \{0, 5\}$ b) $D_f = R \setminus \{1, 3\}$ c) $D_f = (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$ d) $D_f = (4, +\infty)$ dh) $D_f = (-4, 4)$
 5. 9, 6, 4, $2a^2 - 3a + 4$; 6. $f(x) = -2x - 1$; 7. $f(x) = -x^2 + 2x + 3$; 8. a) $N_f = \{1, 2\}$ b) $N_f = \left\{\frac{2}{3}\right\}$; 9. a) $N_f = \{-2, -1, 0, 1\}$
 b) $N_f = \{3\}$; 10. a) $N_f = \{-2, 2\}$ $N_f = \{-1 - \sqrt{10}, -1 + \sqrt{10}\}$ 11. a) $D_f = R$, $N_f = \{-4, 2\}$ b) $D_f = R \setminus \{4\}$, $N_f = \left\{1, \frac{3}{2}\right\}$
 c) $D_f = (-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$, $N_f = \{-4, 4\}$ d) $D_f = R$, $N_f = \{2\}$; d) $D_f = (-2, +\infty)$, $N_f = \{998\}$

12. a) tek, b) çift, c) as çift, as tek; 13. a) çift, b) çift, c) as çift, as tek, d) as çift, as tek, dh) çift; 14. a) monotonisht rritet, b) monotonisht rritet, c) monotonisht zvogëlohet, d) monotonisht zvogëlohet;

15. a) i kufizuar b) i kufizuar c) i kufizuar d) i kufizuar dh) i kufizuar; 16. a) $(f \circ g)(x) = 9x^2 - 12x + 5$

$(g \circ f)(x) = -1 - 3x^2$ b) $(f \circ g)(x) = \sin(x^2)$ c) $(g \circ f)(x) = \sin^2 x$ b) $(f \circ g)(x) = \frac{x+7}{+5}$, $(g \circ f)(x) = \frac{1}{2x+6}$

c) $(f \circ g)(x) = \lg \sqrt{x}$, $(g \circ f)(x) = \sqrt{\lg x}$; 17. a) $f(x) = 3x - 7$ b) $f(x) = 4 - x^2$ c) $f(x) = \sin x$

2. FUNKSIONI LINEAR

1. a) $A(0, 1)$ dhe $B(-1, 0)$ b) $A(0, 3)$ dhe $B(3, 0)$ c) $A(0, 2)$ dhe $B(-6, 0)$ d) $A(0, -1)$ dhe $B(1, -1)$;

2. a) $y = 2$ b) $x = -3$ c) $y = x + 5$ d) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$; 3. a) $y = -3x - 1$ b) $y = \frac{1}{2}x$; 4. a) $y = x$ b) $y = -x$

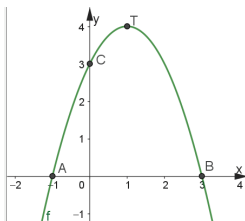
3. FUNKSIONI KATROR

1. a) $T(-1, -1)$, $A(-2, 0)$, $B(0, 0)$, $C(-3, 3)$ dhe $D(1, 3)$ b) $T(3, -4)$, $A(1, 0)$, $B(5, 0)$, $C(0, 5)$ dhe $D(6, 5)$ c) $T(0, -4)$, $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$, $C(-1, -3)$ dhe $D(1, -3)$;

2. a) $D_f = R = (-\infty, +\infty)$ b) $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$ c) $T(1, 4)$, ndërsa $y_{\max} = 4$ për $x=1$ d) $V_f(-\infty, 4]$ rritet për $x \in (-\infty, 1)$, zvogëlohet për $x \in (1, +\infty)$

dh) $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

$B = (3, 0)$
 $A = (-1, 0)$
 $C = (0, 3)$
 $T = (1, 4)$

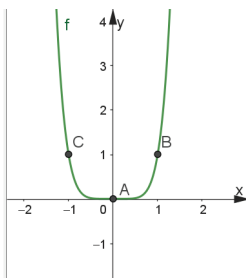


3. $f'(x) = x^2 + 1$

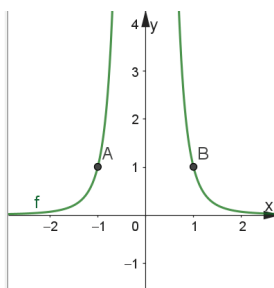
4. $f(x) = x^2 - 3x + 1$

FUNKSIONI I FUQISË

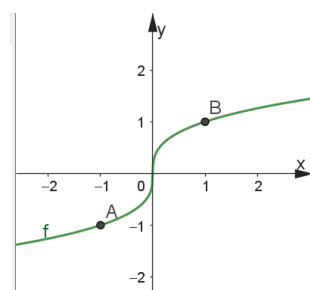
1. a) $f(x) = x^6$
 $A = (0, 0)$
 $B = (1, 1)$
 $C = (-1, 1)$



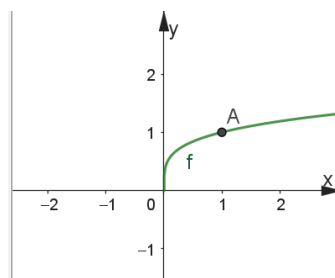
b) $f(x) = x^{-4}$
 $B = (1, 1)$
 $A = (-1, 1)$



2. a) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$
 $B = (1, 1)$
 $A = (-1, -1)$

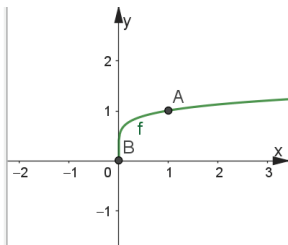


b) $f(x) = x^{\frac{1}{4}}$
 $A = (1, 1)$



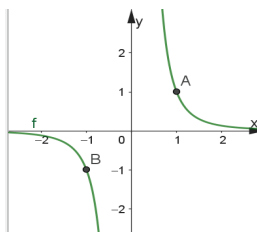
3. a) $D_f = [0, +\infty)$ b) Po c) $V_f = [0, +\infty)$ ç) I kufizuar prej poshtë $0 \leq x^{\frac{1}{6}} < +\infty$

d) $f(x) = x^{\frac{1}{6}}$
 $A = (1, 1)$
 $B = (0, 0)$



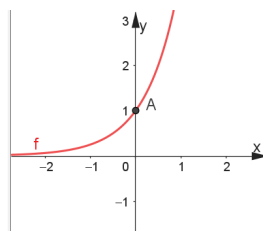
4. a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ b) Jo c) $V_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ç) Jo

d) $f(x) = x^{-3}$
 $A = (1, 1)$
 $B = (-1, -1)$

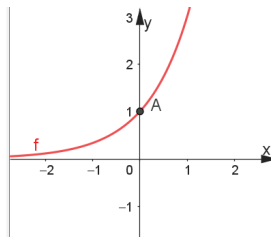


4. FUNKSIONI EKSPONENCIAL

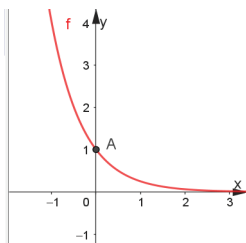
1. a) $f(x) = 4^x$
 $A = (0, 1)$



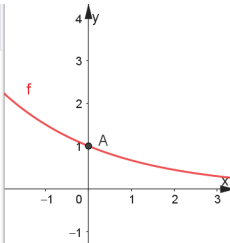
b) $f(x) = 3^x$
 $A = (0, 1)$



2. a) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$
 $A = (0, 1)$



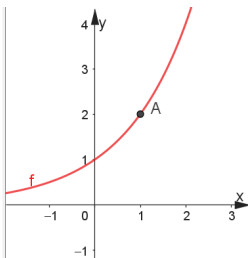
b) $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$
 $A = (0, 1)$



3. a) $a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$ b) $D_f = \mathbb{R}, V_f = (0, +\infty)$ c) I kufizuar prej poshtë, $f(x) > 0$

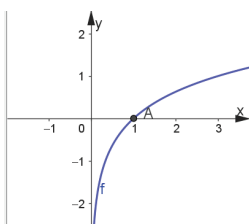
ç) Për $a > 1$, funksioni monotonisht rritet në të gjithë fushën e përkufizimit, ndërsa për $0 < a < 1$ funksioni monotonisht zvogëlohet në të gjithë fushën e përkufizimit d) Nuk ka zero;

4. $f(x) = 2^x$
 $A = (1, 2)$

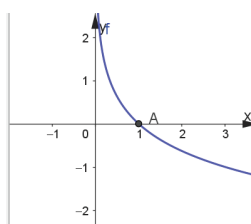


6. FUNKSIONI LOGARITMIK

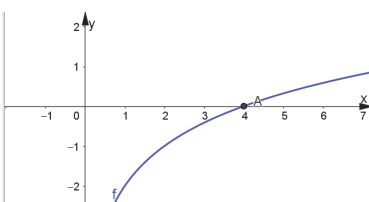
1. a) $f(x) = \log_3(x)$
 $A = (1, 0)$



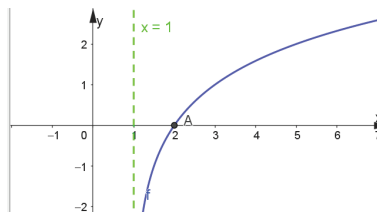
b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x)$
 $A = (1, 0)$



2. a) $f(x) = -2 + \log_2(x)$
 $A = (4, 0)$

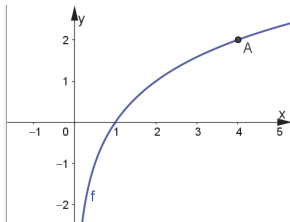


b) $f(x) = \log_2(x - 1)$
 $g: x = 1$
 $A = (2, 0)$



3. a) $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$ b) $D_f = (0, +\infty)$ dhe $V_f = \mathbb{R}$ c) Jo ç) Për $a > 1$ funksioni monotonisht rritet në të gjithë fushën e përkufizimit, ndërsa për $0 < a < 1$ monotonisht zvogëlohet në të gjithë fushën e përkufizimit d) Po;

4. $f(x) = \log_2(x)$
 $A = (4, 2)$



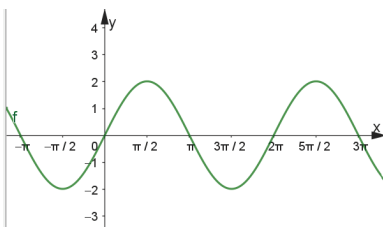
7. KONCEPTI PËR FUNKSIONIN INVERS

1. a) $f^{-1}(x) = \frac{4}{3} - 2x$ b) $f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-2}$; 2. a) $f^{-1}(x) = (x-1)^3$ b) $f^{-1}(x) = 2 + \log(x-3)$; 4. $a = 1$, $b = 0$ osë $a = -1$, $b \in \mathbb{R}$;

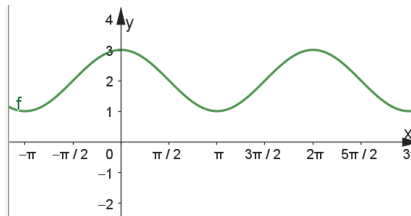
5. a) $f^{-1}(x) = \frac{1-x}{x}$ b) $f^{-1}(x) = x^2 - 1$, $x \in [0, +\infty)$ c) $f^{-1}(x) = \log_2(x+1)$, $x \in (1, +\infty)$ ç) $f^{-1}(x) = e^{x-1} - 2$ d) $f^{-1}(x) = \frac{2-2x}{1+x}$

8. FUNKSIONET TRIGONOMETRIKE THEMELORE

1. a) $f(x) = 2 \sin(x)$



b) $f(x) = \cos(x) + 2$



2. a) Po, b) Po, c) Po; 3. a) Çift, b) Tek c) As çift, as tek.

DETYRA PËR PËRRSËRITJE DHE ZBATIM PRAKTIK.

1. a) $D_f = R$ b) $D_f = R \setminus \{-4, 1\}$, c) $D_f = (-2, 2)$; 2. a) $N_f = \emptyset$ b) $N_f = \{-1, 1\}$, c) $N_f = \{0\}$; 3. $f(x) = 2x - 2$

4. a) çift, b) çift, c) çift; 5. a) $f^{-1}(x) = \frac{8}{9} - \frac{4}{3}x$, b) $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2x-1}$, c) $f^{-1}(x) = (x+2)^3$, ç) $f^{-1}(x) = \frac{e^{2x}-1}{2e^x}$;

6. a) $f(-2) = 1$, $f(0) = 2$, $f(3) = \frac{7}{2}$, b) $(-4, 0)$, $(0, 2)$ ç) rritet për $x \in R$ d) $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ dh) për $x = -2$ e) për $x \in (-\infty, -6)$;

7. a) $f(-2) = 5$, $f(0) = 1$, $f(3) = -5$ b) $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $(0, 1)$ ç) zvogëlohet për $x \in R$ d) $(-\infty, -5)$ dh) për $x \in (3, +\infty)$; 8. a) Jo, b) zvogëlohet për $x \in R$

c) $f(2) = -1$, $f(-1) = 2$ ç) $(3, +\infty)$ d) për $x=2$ dh) për $x \in (-4, 0)$; 9. a) për $x=0$ ka vlerë më të madhe b) rritet për $x \in (-\infty, 0)$, zvogëlohet për $x \in (0, +\infty)$ c) $f(1) = 2$, $f(0) = 4$ ç) $(0, 2)$ d) Nuk ka dh) për $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$; 10. a) Nuk ka b) zvogëlohet për $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

c) $f(1) = 0$, $f(0) = 1$ ç) $(-\infty, -1)$ d) për $x=0$ dh) për $x \in (-\infty, -1)$

Njësia modulare 3 – VLERA KUFITARE E FUNKSIONIT

1. KONCEPTI PËR VLERË KUFITARE TË FUNKSIONIT

1. a) 19, b) $\frac{1}{5}$; 2. a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ b) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$ c) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$

ç) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$ d) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ dh) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$; 3. a) 2, b) divergon, c) 2,

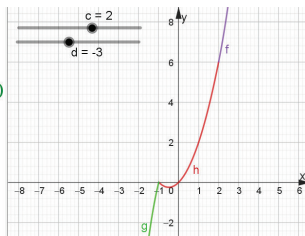
ç) divergon, d) $\frac{1}{2\sqrt{6}}$ dh) $3\sqrt[3]{b^2}$; d) 3; 4. a) $-\frac{3}{2}$ b) $\frac{5}{9}$ c) $\frac{1}{32}$ ç) divergon d) 1, dh) 2, e) 1; 5. a) 2, b) $\frac{3}{4}$ c) 0, ç) $+\infty$ d) 1, dhe) 0,

e) $-\frac{b}{2}$; 6. a) -2, b) -3, c) -1;

2. VIJUESHMËRIA E FUNKSIONIT

2. a) 0, b) 1, c) -1; 4. $a = 1$; 5. $b = -3$;

6. $c = 2$, $d = -3$
 $h(x) = x^2 + x$, $(-1 \leq x \leq 2)$
 $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$, $(2 \leq x \leq \infty)$
 $g(x) = 1 - 2x - 3x^2$, $(-\infty \leq x \leq -1)$



3. ASIMPTOTA E LAKORES

1. $x = 0$ është asimptotë vertikale, $y = 1$ është asimptotë horizontale; 2. $x = -4$ është asimptotë vertikale, $y = 1$ është asimptotë horizontale; 3. $x = 1$ është asimptotë vertikale, $y = x + 1$ është asimptotë e pjerrët; 4. $x = 2$ është asimptotë vertikale, $y = x + 7$ është asimptotë e pjerrët; 5. $x = 0$ është asimptotë vertikale, $y = 2$ është asimptotë horizontale; 6. $x = 1$, $x = 2$ janë asimptota vertikale, $y = 1$ është asimptotë horizontale; 7. $x = 0$ është asimptotë vertikale, $y = x + 1$ është asimptotë e pjerrët; 8. $x = 2$, $x = -2$ janë asimptota vertikale, $y = -x$ është asimptotë e pjerrët; 9. $y = 0$ është asimptotë horizontale; 10. $y = 1$, $y = -1$ janë asimptotë horizontale; 11. $y = 3x$ është asimptotë e pjerrët; 12. $y = 0$ është asimptotë horizontale; 13. $y = -2$ është asimptotë horizontale; 14. $y = 12$ është asimptotë horizontale;

15. $x = 2$, $x = -2$ janë asimptota vertikale, $y = 0$ është asimptotë horizontale.

4. KUFIJTË E FUNKSIONEVE ELEMENTARE. ASIMPTOTAT E GRAFIKËVE TË FUNKSIONEVE ELEMENTARE

1. a) Nuk ka b) $x = 0$ është asimptotë vertikale, $y = 0$ është asimptotë horizontale c) $y = 0$ është asimptotë horizontale;

2. a) Nuk ka b) Nuk ka c) Nuk ka ç) Nuk ka; d) $x = 0$ asimptotë vertikale, $y = 0$ asimptotë horizontale dh) Nuk ka e) $x = 0$ asimptotë vertikale g) $x = 0$ asimptotë vertikale h) $y = 0$ asimptotë horizontale i) $y = 0$ është asimptotë horizontale

5. VLERA KUFITARE SPECIALE

1. a) $\frac{4}{7}$, b) $\frac{1}{2}$ 2. a) 4, b), $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$; 3. a) e b) e^{-3} 4. a) $e^{-\frac{4}{3}}$ b) e^4

DETYRA PËR PËRRSËRITJE DHE ZBATIM PRAKTIK:

1. a) 9, b) $\frac{13}{14}$; 2. a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ b) $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = +\infty$; 3. a) $\frac{1}{2}$, b) 1, c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{8}{3}$ 2, dh) $\frac{1}{4}e - 2$,

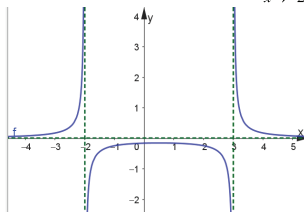
- g) $-\frac{1}{3}$, h) $\frac{2}{3}$; 4. a) 3, b) $-\frac{1}{4}$, c) $-\frac{1}{2}$; 5. a) $\frac{2}{3}$, b) -1, c) 1; 6. a) $\frac{1}{3}$, b) $\frac{7}{4}$, c) $\frac{2}{5}$, d) $\frac{1}{2}$ dh) e^4 , e) e^{-4} , g) e^2 , h) $\frac{1}{e}$;

8. a) për $x = -2$, $x = 3$ b) $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 3) \cup (3, +\infty)$ c) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$ d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$

d) prej tre

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x - 6}$$

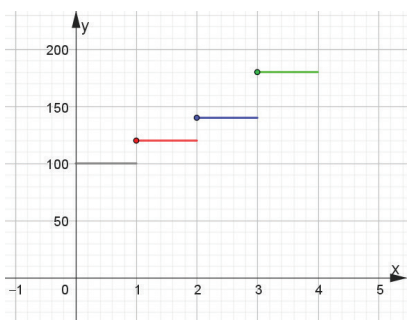
$$H = \{y = 0, x = -2, x = 3\}$$



9. a) $x = -1$ është asimptotë vertikale, $y = 3$ është asimptotë horizontale, b) $x = 1$, $x = -1$ është asimptotë vertikale, $y = 1$ është asimptotë horizontale, c) $x = 0$ është asimptotë horizontale, $y = 2$ është asimptotë horizontale, d) $y = -x$ është asimptotë e pjerrët;

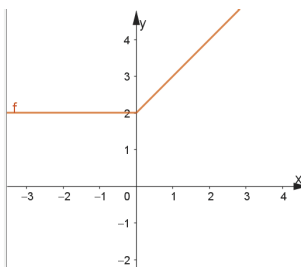
10. a) $f(0,75) = 100$, $f(1) = 120$, $f(3,5) = 180$ b) Nuk ekziston c) $D_f = (0, 4)$ d) Po.

d)

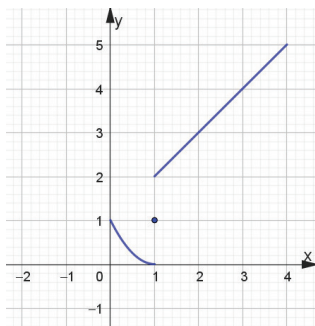


11.

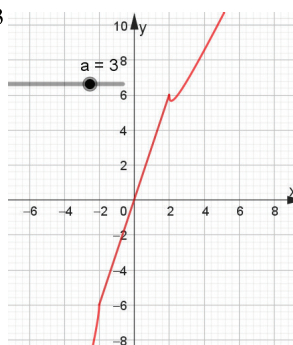
$$f(x) = \begin{cases} 2 & : x < 0 \\ x + 2 & : x \geq 0 \end{cases}$$



12.



13. Nuk ekziston; 14. $a = 0$; 15. $a = 3$



Njësia modulare 4 – DERIVATI I FUNKSIONIT

1. PËRKUFIZIMI I DERIVATIT TË FUNKSIONIT TE PIKA

1. a) 0.5, b) 0.791, c) 0.0033, d) -0.045; 2. a) 2, $f'(-2) = 2$ b) $-\frac{2}{x^3}$, $f'(1) = -2$ c) $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$, $f'(3) = \frac{1}{4}$ d) $3x^2$, $f'(-1) = 3$;

3. a) 5, b) $\frac{2}{x^3}$ c) $6x + 2$ d) $-\frac{2}{(x-1)^2}$; 4. a) $2^x \ln 2$, $f'(0) = \ln 2$ b) $\frac{1}{x}$, $f'(e) = \frac{1}{e}$ c) $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$, $f'(3) = \frac{1}{4}$

- d) $\frac{4x}{(1-x^2)^2}$, $f'(0) = 0$; 5. Udhëzim: Njehso derivatin sipas përkufizimit dhe trego se te vlera përkatëse e x , $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$

2. CAKTIMI I DERIVATEVE TË FUNKSIONEVE ELEMENTARE

1. a) $7x^6$, b) $\frac{2}{5\sqrt[3]{x^3}}$, c) 0 , d) $-\frac{4}{x^5}$; 2. a) $7^x \ln 7$ b) $\frac{1}{x \ln 7}$ c) $\frac{1}{x}$ d) $-\frac{1}{\sin^2 x}$; 3. a) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \ln \frac{1}{2}$, b) $\frac{1}{x \ln 3}$, c) $-\sin x$, d) $\frac{1}{\cos^2 x}$;
4. a) e^x b) $\frac{1}{1+x^2}$ c) 1 , $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 5. a) $6^x \ln 6$, b) $-\frac{1}{1+x^2}$, c) $\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$, d) $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

3. DERIVATI I SHUMËS, NDRYSHIMIT, PRODHIMIT DHE HERËSIT

1. 5; 2. $3x^2 - 4x + 3$; 3. $3x^2 - 3$; 4. $12x^3 - 18x^2 + 2x - 4$; 5. $1 - \frac{1}{x^2}$; 6. $-\frac{2}{x^3} + \frac{12}{x^5}$; 7. $\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$; 8. $2x - 2 \cos x$;
9. $2 \cos x - 4 \sin x$; 10. $\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} + 5^x \ln 5$; 11. $4x^3 \ln x + x^3$; 12. $3x^2 \cos x - x^3 \sin x$; 13. $2 \sin x + 2x \cos x$;
14. $12x^{11} e^x \operatorname{tg} x + x^{12} e^x \operatorname{tg} x + \frac{x^{12} e^x}{\cos^2 x}$; 15. $e^x \arcsin x + \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}$; 16. $36x^5 - 60x^4 + 8x^3 - 30x^2 + 24x - 2$;
17. $2x - \cos^2 x + \sin^2 x$; 18. $-\frac{1}{x^2}$; 19. $\frac{x^2 - 2x - 1}{(x^2 + 1)^2}$; 20. $\frac{-3x^2 - 2x - 3}{(x^2 - 1)^2}$; 21. $\frac{-x^2 + 2x - 4}{(x^2 - 4)^2}$; 22. $\frac{-x^2 - 6x - 4}{(x^2 - 4)^2}$;
23. $\frac{4x - 4}{(x^2 - 2x)^2}$; 24. $\frac{2 \cos x}{(1 - \sin x)^2}$; 25. $\frac{e^x (\sin x + x \sin x - x \cos x)}{\sin^2 x}$; 26. $\frac{\sin x - x}{1 - \cos x}$; 27. $2 \cos x - \frac{1}{2} e^x + \frac{7}{x^2 + 1}$;
28. $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^3}} - \frac{6}{x^3} + \frac{3}{4x^4}$; 29. $\frac{2}{1 + \sin(2x)}$; 30. $-\frac{e^x + \cos x + x \sin x + x \cos x}{x^2 e^x}$; 31. $\frac{6}{7\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{x \ln 6} - \frac{1}{\cos^2 x}$;
32. $x^3 e^x (4 \sin x + x \sin x + x \cos x)$; 33. $\frac{x^2 - 10x + 16}{2(x - 5)^2}$; 34. $\frac{x \cos x - x \sin x - e^x - \sin x}{x^2 e^x}$; 35. $\frac{\cos x - x \ln x \sin x - 2 \ln x \cos x}{x^3}$;
36. $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$; 37. $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$; 38. $\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x \cdot \sqrt{x}}{\cos^2 x} + \frac{\ln x \cdot \operatorname{tg} x}{2\sqrt{x}}$; 39. $\frac{(1 + \sqrt[3]{x})^2 (\sqrt[3]{x} - 1)}{2x\sqrt{x}}$; 40. $\frac{7}{8\sqrt[8]{x}}$

4. DERIVATI PREJ FUNKSIONIT TË PËRBËRË

1. $15(5x - 7)^2$; 2. $\frac{3}{2\sqrt{3x - 5}}$; 3. $(2x - 2)e^{x^2 - 2x + 5}$; 4. $\frac{2}{2x - 9}$; 5. $\frac{2}{x(1 - x^2)}$; 6. $\frac{1}{x^2 - 1}$; 7. $\ln(x + \sqrt{1 + x^2})$; 8. $\sin x^4 + 4x^4 \cos x^4$;
9. $5x^4 \cos x^5$; 10. $5 \sin^4 x \cdot \cos x$; 11. $-3 \cos^2 x \cdot \sin x \cdot \cos x^3 - 3x^2 \cdot \cos^3 x \cdot \sin x^3$; 12. $\frac{-1 + \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^4 x}{\cos^2 x}$; 13. $\frac{18(x - 3)^2}{(x + 3)^4}$;
14. $\frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}$; 15. $\frac{x \cos(\sqrt{1 + x^2})}{\sqrt{1 + x^2}}$; 16. $\frac{1}{2(1 - x^2)}$; 17. $(2x - 2) \operatorname{ctg}(x^2 - 2x + 2)$; 18. $-\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$; 19. $\frac{8x}{16 - x^4}$; 20. $\frac{-3x^2 - 2x - 3}{(x^2 - 1)^2}$;
21. $\frac{-x^2 + 2x - 4}{(x^2 - 4)^2}$; 22. $\frac{-x^2 - 6x - 4}{(x^2 - 4)^2}$; 23. $\frac{4x - 4}{(x^2 - 2x)^2}$; 24. $\frac{2 \cos x}{(1 - \sin x)^2}$; 25. $\frac{e^x (\sin x + x \sin x - x \cos x)}{\sin^2 x}$;

5. DERIVATET LOGARITMIKE

1. $-\frac{1}{x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x^5}} \left(\ln \left(1 + \frac{1}{x^5} \right) + \frac{5}{x^5 + 1} \right)$; 2. $-\frac{1}{(x - 2)^2} \left(\frac{x + 7}{x - 2} \right)^{\frac{1}{x - 2}} \left(\ln \left(\frac{x + 7}{x - 2} \right) + \frac{9}{x + 7} \right)$; 3. $-\frac{1}{x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x^7}} \left(\ln \left(1 + \frac{1}{x^7} \right) + \frac{7}{x^2 + 1} \right)$;
4. $-\frac{1}{(x + 4)^2} \left(\frac{x + 5}{x + 4} \right)^{\frac{1}{x + 4}} \left(\ln \left(\frac{x + 5}{x + 4} \right) + \frac{1}{x + 5} \right)$; 5. $(\sin x)^{\sin^2 x} (\sin(2x) \cdot \ln(\sin x) + \sin x \cdot \cos x)$;
6. $(\sin x)^{\cos x} (\operatorname{ctg} x \cdot \cos x - \sin x \cdot \ln(\sin x))$; 7. $\frac{\sqrt[3]{x}}{x^2} (1 - \ln x)$; 8. $(\ln x)^x \left(\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x} \right)$; 9. $\left(1 - \frac{1}{x + 1} \right)^x \left(\ln \left(1 - \frac{1}{x + 1} \right) + \frac{1}{x + 1} \right)$;
10. $x^{x+1} (x + 1) \left(\ln x + \frac{x + 1}{x} + \frac{1}{x + 1} \right)$; 11. $x^{x^x} (x^x \ln x (\ln x + 1) + x^{x-1})$; 12. $\left(\frac{\ln x}{x} \right)^{\cos x} \left(\frac{\cos x (1 - \ln x)}{x \ln x} - \sin x \ln \left(\frac{\ln x}{x} \right) \right)$;
13. $\frac{x + 3}{(x - 7)\sqrt[3]{(x + 2)^3}} \left(\frac{1}{x + 3} - \frac{1}{x - 7} - \frac{3}{4(x + 2)} \right)$; 14. $\frac{\sqrt{x - 1}}{\sqrt[3]{(x + 2)^2} \cdot \sqrt[4]{(x + 3)^3}} \left(\frac{1}{2(x - 1)} - \frac{2}{3(x + 2)} - \frac{3}{4(x + 3)} \right)$;
15. $\frac{(1 - x^2) \cdot e^{3x-1} \cdot \cos x}{\sin^3 x} \left(3 - \frac{2x}{1 - x^2} - \operatorname{tg} x - 3 \operatorname{ctg} x \right)$; 16. $\sqrt{(x + 1)^3} \cdot \frac{2x - 1}{x + 2} \cdot e^{x^2} \cdot \sin^4 x \cdot \cos^3 x \left(\frac{3}{2(x + 1)} + \frac{2}{2x - 1} - \frac{1}{x + 2} + 2x + 4 \operatorname{ctg} x - 3 \operatorname{tg} x \right)$

6. ZBATIMI I DERIVATEVE. KAKTIMI I BARAZIMIT TË TANGJENTËS DHE NORMALES SË FUNKSIONIT

1. $t: y = -2x + 3$, $n: y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$; 2. $t: y = x + \frac{1}{4}$; 3. $t: y = 2x - \frac{1}{4}$; 4. a) $A\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$ b) $B(0, 2)$; 5. $n: y = -\frac{1}{7}x + \frac{36}{7}$;
 6. a) $t: y = 3$, $n: x = 2$ b) $t: y = x\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{4}$, $n: y = -\frac{\sqrt[3]{2}}{2}x - \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$ c) $t: x = 3$, $n: y = 0$; 7. $n: y = x - \frac{3}{e^2}$; 8. a) $k_t = 4$, $k_n = -\frac{1}{4}$,
 b) $k_t = \sqrt{10}$, $k_n = -\frac{\sqrt{10}}{10}$; 9. a) $A(2, \ln 2)$, b) $B\left(\frac{1}{2}, -\ln 2\right)$; 10. $A(1, 0)$ dhe $B(1, -1)$;

7. ZBATIMI I DERIVATIT NË FIZIKË

1. a) $32m/s$, $40m/s^2$ b) $1120m/s$, $232m/s^2$; 2. a) $29.43m/s$, $9.81m/s^2$ b) $9.81m/s$, $9.81m/s^2$; 3. 1s;
 4. a) $v(t) = t^3 - 12t^2 + 32t$, b) 4s; 5. 4s.

8. ZBATIMI I DERIVATIT. SHQYRTIMI I VIJIMIT DHE GRAFIKU I FUNKSIONIT

SHQYRTIMI I MONOTONISË SË FUNKSIONIT

1. a) rritet për $x \in (-\infty, 0)$, zvogëlohet për $x \in (0, +\infty)$ b) rritet për $x \in (3, +\infty)$, zvogëlohet për $x \in (-\infty, 3)$ c) rritet për $x \in (1, +\infty)$, zvogëlohet për $x \in (-\infty, 1)$ ç) rritet për $x \in (-\infty, 2)$, zvogëlohet për $x \in (2, +\infty)$; 2. a) rritet për $x \in (0, 2)$, zvogëlohet për $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$,
 b) rritet për $x \in (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$, zvogëlohet për $x \in (-2, 3)$ c) rritet për $x \in (-2, 0) \cup (2, +\infty)$, zvogëlohet për $x \in (-\infty, -2) \cup (0, 2)$,
 ç) rritet për $x \in (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$, zvogëlohet për $x \in (-2, 3)$; 3. a) rritet për $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, zvogëlohet për $x \in (0, 1) \cup (1, 2)$,
 b) rritet për $x \in (-1, 1)$, zvogëlohet për $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ c) rritet për $x \in \left(-\frac{1}{2}, 2\right)$ zvogëlohet për $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (2, +\infty)$,
 ç) rritet për $x \in (0, +\infty)$, zvogëlohet për $x \in (-\infty, 0)$; 4. a) rritet për $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, zvogëlohet për $x \in (-1, 1)$ b) rritet për $x \in (0, 2)$,
 zvogëlohet për $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ c) rritet për $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, zvogëlohet për $x \in (-1, 1)$ ç) rritet për $x \in (-1, +\infty)$, zvogëlohet për $x \in (-\infty, -1)$.

SHQYRTIMI I VLERAVE EKSTREME TË FUNKSIONIT

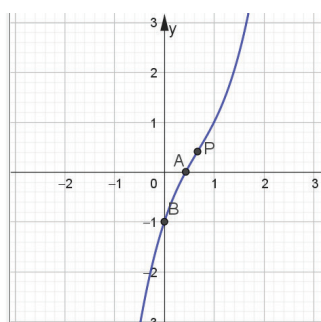
1. a) Maksimum në $A(-7, -14)$, minimum në $B(-1, -2)$, b) Maksimum në $(-1, -2)$, minimum në $(1, 2)$ c) Maksimum në $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{22}{27}\right)$, minimum në $(1, -2)$, ç) minimum në $(1, 1)$, d) Nuk ka ekstreme dh) Maksimum në $\left(-1, \frac{5}{3}\right)$, minimum në $(3, -9)$;
 2. a) Maksimum në $(-1, 2)$, minimum në $(-5, 10)$, b) Minimum në $(-1, 2)$ dhe $(1, 2)$, c) Maksimum në $(1, 2)$, minimum në $\left(-\frac{1}{3}, \frac{22}{27}\right)$,
 ç) Maksimum në $(1, 1)$, d) Maksimum në $(3, 4)$, minimum në $(1, 0)$, dh) Maksimum në $(-1, 5)$, minimum në $(3, -27)$;
 3. Maksimum në $(2, -3)$, minimum në $(8, 3)$; 4. Maksimum në $(2, 7)$, minimum në $(0, -1)$.

SHQYRTIMI I KONVEKSITETIT DHE KONKAVITETIT TË FUNKSIONIT. PIKAT E INFLEKSIONIT TË FUNKSIONIT

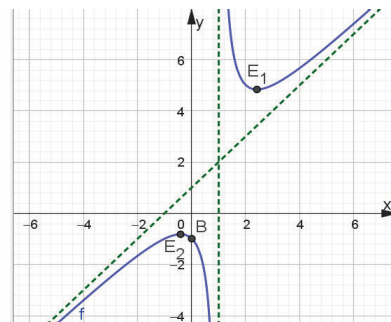
1. konkave (e futur) për $x \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$, konvekse (e dalë) për $x \in \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$, pika e infleksionit është $P\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{27}\right)$;
 2. konkave (e futur) për $x \in (-\infty, 1)$, konvekse (e dalë) për $x \in (1, +\infty)$.
 3. $a = 3$; 4. Pika të infleksionit janë $P_1(1, 1)$, $P_2\left(-2 + \sqrt{3}, \frac{1 + \sqrt{3}}{4}\right)$, $P_3\left(-2 - \sqrt{3}, \frac{1 - \sqrt{3}}{4}\right)$. Barazimi i drejtëzës është $x - 4y + 3 = 0$.

SHQYRTIMI I VIJIMIT DHE KONSTRUKSIONI I GRAFIKUT TË FUNKSIONIT

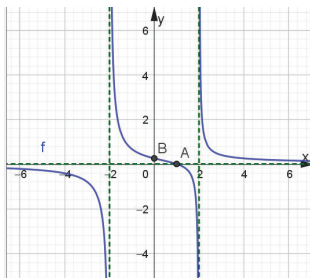
1. a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$
 $A = (0.43, 0)$
 $B = (0, -1)$
 $I_1 = \emptyset$
 $P = (0.67, 0.41)$



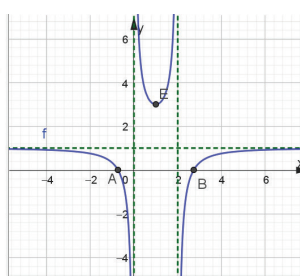
- b) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$
 $B = (0, -1)$
 $I_1 = \{y = x + 1, x = 1\}$
 $E_2 = (-0.41, -0.83)$
 $E_1 = (2.41, 4.83)$



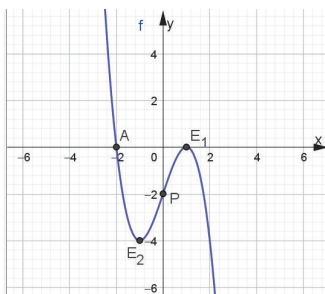
c) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$
 $B = (0, 0.25)$
 $I1 = \{y=0, x=-2, x=2\}$
 $A = (1, 0)$



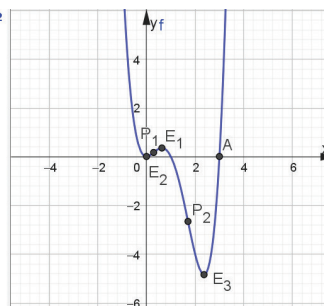
2. a) $f(x) = \frac{x^2-2x-2}{x^2-2x}$
 $I1 = \{y=1, x=0, x=2\}$
 $E = (1, 3)$
 $A = (-0.73, 0)$
 $B = (2.73, 0)$



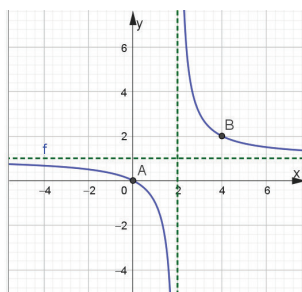
b) $f(x) = -x^3 + 3x - 2$
 $I1 = \emptyset$
 $P = (0, -2)$
 $E_2 = (-1, -4)$
 $E_1 = (1, 0)$
 $A = (-2, 0)$



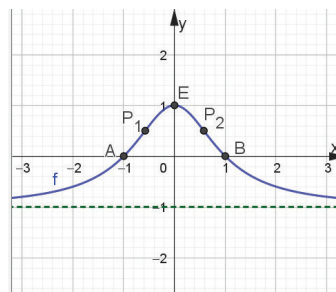
c) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2$
 $I1 = \emptyset$
 $P_2 = (1.71, -2.66)$
 $P_1 = (0.29, 0.16)$
 $E_3 = (2.37, -4.85)$
 $E_1 = (0.63, 0.35)$
 $E_2 = (0, 0)$
 $A = (3, 0)$



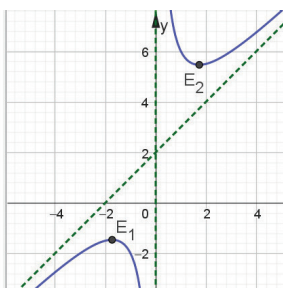
3. a) $f(x) = \frac{x}{x-2}$
 $I1 = \{y=1, x=2\}$
 $A = (0, 0)$
 $B = (4, 2)$



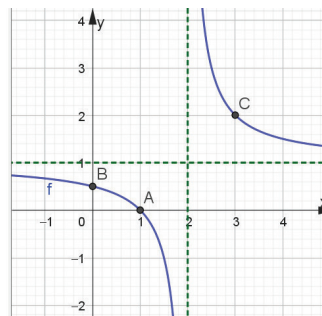
b) $f(x) = \frac{1-x^2}{x^2+1}$
 $I1 = \{y=-1\}$
 $A = (-1, 0)$
 $P_2 = (0.58, 0.5)$
 $P_1 = (-0.58, 0.5)$
 $B = (1, 0)$
 $E = (0, 1)$



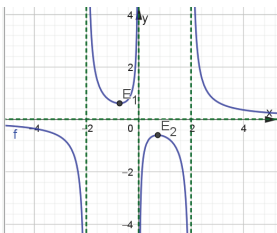
c) $f(x) = \frac{x^2+2x+3}{x}$
 $I1 = \{y=x+2, x=0\}$
 $E_2 = (1.73, 5.46)$
 $E_1 = (-1.73, -1.46)$
 $B = (0, \infty)$



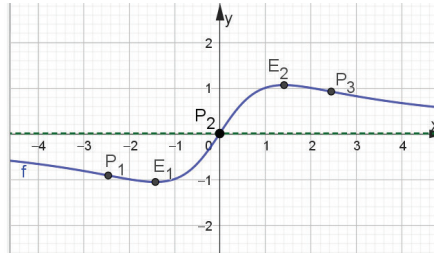
4. a) $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$
 $I1 = \{y=1, x=2\}$
 $A = (1, 0)$
 $B = (0, 0.5)$
 $C = (3, 2)$



b) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^3-4x}$
 $I1 = \{y=0, x=-2, x=0, x=2\}$
 $E_2 = (0.73, -0.61)$
 $E_1 = (-0.73, 0.61)$



c) $f(x) = \frac{3x}{x^2+2}$
 $I1 = \{y=0\}$
 $E_1 = (-1.41, -1.06)$
 $E_2 = (1.41, 1.06)$
 $P_2 = (0, 0)$
 $P_1 = (-2.45, -0.92)$
 $P_3 = (2.45, 0.92)$



5. a) $f(x) = (1-x^2)e^{-x}$

$I1 = \{y = 0\}$

$E_1 = (-0.41, 1.25)$

$E_2 = (2.41, -0.43)$

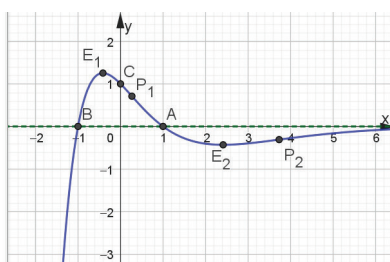
$P_1 = (0.27, 0.71)$

$P_2 = (3.73, -0.31)$

$A = (1, 0)$

$B = (-1, 0)$

$C = (0, 1)$



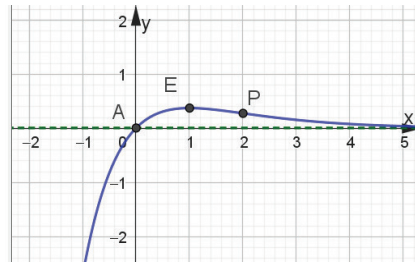
b) $f(x) = xe^{-x}$

$I1 = \{y = 0\}$

$E = (1, 0.37)$

$A = (0, 0)$

$P = (2, 0.27)$



c) $f(x) = x^2 e^x$

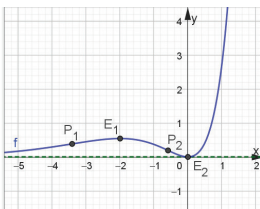
$I1 = \{y = 0\}$

$E_1 = (0, 0)$

$E_2 = (-2, 0.54)$

$P_1 = (-3.41, 0.38)$

$P_2 = (-0.59, 0.19)$

6. a) $D_f = R \setminus \{1, 3\}$ b) $A = (0.75, 0)$ c) $B = (0, 1)$ ç) rritet për $x \in (-\infty, 0) \cup (1.5, 3) \cup (3, +\infty)$, zvogëlohet për $x \in (0, 1) \cup (1, 1.5)$ d) e dalë për $x \in (-0.85, 1) \cup (3, +\infty)$, e futur për $x \in (-\infty, -0.85) \cup (1, 3)$ dh) maksimum në $B = (0, 1)$, minimum në $C = (1.5, 4)$ e) $D = (-0.85, 0.9)$ f) $f(4) = -4.33$ g) $x = 1.5$ as çift, as tek; 7. a) $D_f = R \setminus \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$ b) $A = (0, 0)$ c) $A = (0, 0)$ ç) rritet për $x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$, zvogëlohet për $x \in (-3, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 3)$ d) e dalë për $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$, e futur për $x \in (-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$ dh) maksimum në pikën $B = (-3, -4.5)$, minimum në pikën $C = (3, 4.5)$ e) $A = (0, 0)$ f) $f(4) = 4.92$ g) tek;

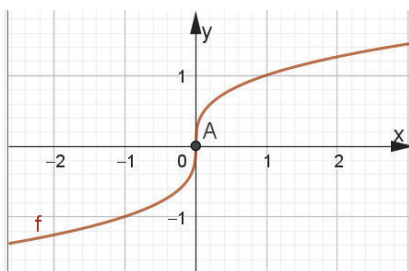
9. ZBATIMI I DERIVATIT PËR ZGJIDHJEN E PROBLEMEVE PREJ EKSTREMEVE

1. 21 dhe 21; 2. $\frac{27}{2}$ dhe $\frac{27}{2}$; 3. 9 dhe 9; 4. Katrori me brinjë $\frac{13}{2}$; 5. Katrori me brinjë $\frac{11}{2}$; 6. Katrori me brinjë prej 8 banga. 12m;7. trekëndësh barakrahas kënddrejtë me kateta $5\sqrt{2}$; 8. Drejtkëndësh me brinjë 4cm dhe 1.5cm dhe syprinë $3cm^2$;9. rreze 3cm dhe lartësi 6cm. Cilindër barabrinjës; 10. $r = \frac{8}{3}cm$, $h = 2cm$, $V = \frac{128}{9}\pi cm^3$;12. Katror me brinjë 6cm. $V = 3888cm^3$; 13. Në pikën $(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})$; 14. $S = \frac{32\sqrt{3}}{9}$;

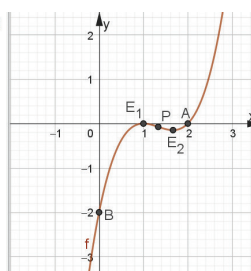
DETYRA PËR PËRSËRITJE DHE ZBATIM PRAKTIK:

1. $12x^2 - x + 3$; 2. $\frac{5}{2(x+3)\sqrt{(x-2)(x+3)}}$; 3. $\frac{5}{(3x-2)(x+1)}$; 4. $e^{3x}(3\sin(x^2+1) + 2x\cos(x^2+1))$; 5. $y = 4$; 6. $y = -x + 1$;7. $v = s'(2) = 8$; 8. $a = s''(1) = 20$; 9. $t: y = \frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$ dhe $n: y = -3x - 10$; 10. Zvogëlohet për $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;11. maksimum në $(0, 0)$, minimum në $(2, -8)$; 12. I dalë për $x \in (-\infty, 1)$, i futur për $x \in (1, +\infty)$. Pika e infleksionit në $(1, -2)$;

13. $f(x) = x^3$
 $A = (0, 0)$



14. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$
 $E_1 = (1.67, -0.15)$
 $E_2 = (1, 0)$
 $P = (1.33, -0.07)$
 $A = (2, 0)$
 $B = (0, -2)$

15. 30 dhe 30; 16. 40 dhe 40; 17. 50 dhe 50; 18. Katror me brinjë 11cm; 19. Rrezja e cilindrit është $\frac{2r}{3}$ dhe lartësia është $\frac{H}{3}$;20. Rrezja e konit është $R\sqrt{2}$ dhe lartësia e konit është $4R$. Vëllimi është $\frac{8\pi}{3}R^3$.

